

Aneta Spodniewska

Metodyczne aspekty zaznajamiania uczniów klas I-III z wiedzą matematyczną = Methodological aspects of the familiarization of students from classes I to III with mathematical knowledge

Edukacja Elementarna w Teorii i Praktyce : kwartalnik dla nauczycieli nr 2, 57-74

2013

Artykuł został opracowany do udostępnienia w internecie przez Muzeum Historii Polski w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego. Artykuł jest umieszczony w kolekcji cyfrowej bazhum.muzhp.pl, gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach dozwolonego użytku.

Aneta Spodniewska
Studentka Katolickiego Uniwersytetu Lubelskiego

Metodyczne aspekty zaznajamiania uczniów klas I-III z wiedzą matematyczną

Methodological aspects
of the familiarization of students
from classes I to III
with mathematical knowledge

*Matematyka jest naturalną działalnością społeczną,
rozwijającą się w miarę wzrostu osobnika i jego rosnących potrzeb
w rozszerzającym się dlań świecie. Matematyka jest postawą,
sposobem opanowywania tego świata poznawczo,
praktycznie i emocjonalnie. (...)*

*Matematyka jest przejawem zarówno naturalnej,
jak i społecznej działalności człowieka. Znajduje się ona
między pierwszymi działaniami poznawczymi, jakże znamy,
a nauczanie matematyki było pierwszym historycznie poświadczonym
rodzajem nauczania.*

Hans Freudenthal

Wstęp

Matematyka, według Arystotelesa, jest królową nauk oraz „stanowi miarę wszystkiego”. W większym stopniu niż jakakolwiek inna dziedzina wiedzy wywiera wpływ na świat, dlatego należy dołożyć wszelkich starań, aby proces nauczania-uczenia się, na etapie edukacji wczesnoszkolnej przebiegał prawidłowo. Dzieci znajdujące się na poziomie myślenia

praktycznego, obrazowo-ruchowego wprowadzane są w świat treści pojęć matematycznych, będących ze swej natury abstrakcyjnymi. Takiemu wyzwaniu powinien podołać nauczyciel, stosując odpowiednie cele, metody i formy nauczania, środki dydaktyczne, uzmysławiając uczniom, że ta abstrakcyjna matematyka ma wymierne zastosowanie w wielu dziedzinach naszego życia.

Głównym zamierzeniem niniejszego tekstu jest przedstawienie założeń metodycznych stosowanych w matematyce. Bazują one na założeniach psychologicznych, które wyjaśniają, czym jest rozumienie matematyczne, aktywność dziecka oraz etapy rozwoju myślenia. Osiągnie ono sukces w sytuacji, gdy nauczyciel będzie świadomy swoich działań.

Myślenie matematyczne u dzieci podstawą działań nauczyciela

Myślenie rozpatrywane z punktu widzenia psychologii poznawczej polega „na operowaniu informacjami uprzednio odebranymi na drodze spostrzegania i zakodowanymi w formie wyobrażeń i pojęć, które są przechowywane w pamięci jako reprezentacje obiektów spostrzeganych w świecie zewnętrznym i przeprowadzanych na nich operacji mentalnych. W skrócie można powiedzieć, że myślenie to przetwarzanie symboli umysłowych. Wspomniane wyżej reprezentacje określane są jako schematy. Stanowią one wzorce działania lub strukturę umysłową umożliwiającą nabywanie i organizowanie wiedzy”¹. Dziecko, które zrozumie znaczenie pojęć, jest w stanie przyswoić oraz uporządkować nabytą wiedzę. Następnie w toku dalszej nauki, używając reprezentacji (schematów), rozwiązywać problemy. Jednak matematyka rządzi się swoimi prawami i aby ją zrozumieć, nauczyciel powinien nauczyć swoich podopiecznych myślenia matematycznego. Specyfika „myślenia matematycznego polega na myśleniu konkretnym, opartym na określonych założeniach, prawach logicznych, definicjach, twierdzeniach, a jednocześnie stawianiu pytań-hipotez, choć nie zawsze można na nie odpowiedzieć. Wymaga umiejętności analizowania i syntetyzowania. Logiczne myślenie, które jest często utożsamiane z myśleniem matematycznym, potrzebne jest w każdej dziedzinie nauki, która wymaga umiejętności kojarzenia faktów i ich wzajemnej zależności. Jest ono pozbawione emocji, które często towarzyszą tzw. myśleniu twórczemu malarzy czy poetów, ale nie znaczy to, że jest pozbawione wyobraźni, która zawsze towarzyszy procesom abstrahowania”². Angażowanie wyobraźni w nauczaniu matematyki to wyruszanie z dzieć-

¹ A. Stawecka, *Rozwój aktywności poznawczej dzieci w wieku wczesnoszkolnym*, „Teoretyczne Podstawy Edukacji Wczesnoszkolnej”, (2009/2010)3, s.12.

² J. Nowik, *Kształcenie matematyczne w edukacji wczesnoszkolnej*, Opole 2011, s. 10.

mi w fascynującą podróż odkrywania i rozumienia świata. Dziecko, któremu się to spodoba, samo będzie dążyło do posługiwania się myśleniem matematycznym, które można rozwijać poprzez:

- praktykę połączoną z refleksją;
- prowokowanie sprzeczności, napięcia i niespodzianek;
- tworzenie sprzyjającej atmosfery do swobodnego zadawania pytań, rzucania wyzwań i refleksji³.

D. Klus-Stańska, definiując myślenie matematyczne, podaje, że jest to „zespół podejmowanych samodzielnie czynności umysłowych polegających na: (1) rozwiązywaniu zadań i innych problemów matematycznych, a więc logicznej analizie treści trudności matematycznej, jej identyfikacji oraz świadomym (kontrolowanym przez siebie, a nie przez nauczyciela) wyborze lub konstrukcji strategii jej rozwiązania, a także na (2) poszukiwaniu tych problemów, czyli dostrzeganiu nowych relacji matematycznych i skłonności do matematyzacji rzeczywistości”⁴. Takie myślenie matematyczne prowadzi do rozumienia pojęcia oraz określenia wynikających z niego czynności.

Na etapie edukacji wczesnoszkolnej należy brać pod uwagę proces rozwojowy dzieci. W zakresie czynności myślenia następuje przejście od myślenia przedoperacyjnego do stadium operacji konkretnych (ok. 6-7 r. ż.), pojawiają się początki odwracalności myślenia. Dziecko odkrywa stałość ilości (ok. 6-8 r. ż.), długości (ok. 6-8 r. ż.) i masy (ok. 7-9 r. ż.). Mowa staje się kontekstowa, poprawna, wszystkie głoski powinny być prawidłowo wymawiane. Wzrasta zasób czynnego słownika (6-latek dysponuje ok. 3 tys. słów, zaś 10-latek – ok. 5,5 tys. słów). Główną strukturą poznawczą, podległą tej fazie, jest grupowanie, czyli kategoryzacja, która ułatwia dzieciom rozwiązywanie problemów. Wraz z nią pojawia się porządkowanie, czyli pojęcie wagi i rozmiaru⁵.

Myślenie rozumiane jako proces poznawania pośredniego charakteryzuje się zdolnością przewidywania wykonanej czynności oraz umiejętnością jej zaplanowania. Proces ten przebiega w umyśle i nosi nazwę interioryzacji-uwewnętrzniania. Według Z. Krygowskiej, proces rozwoju myślenia związanego z poznaniem pośrednim odbywa się w trzech etapach, które należy uwzględnić w planowaniu zajęć dydaktycznych. Rozwój myślenia, w pierwszym etapie zaczyna się od sytuacji konkretnych,

³ J. Mason, L. Burton, K. Stacey, *Matematyczne myślenie*, Warszawa 2005, s. 10.

⁴ D. Klus-Stańska, A. Kalinowska, *Rozwijanie myślenia matematycznego młodszych uczniów*, Warszawa 2004, s. 19.

⁵ I. Fechner-Sędzicka, B. Ochmańska, W. Odrobina, *Rozwijanie zainteresowań i zdolności matematycznych klas I-III szkoły podstawowej. Poradnik dla nauczyciela*, Warszawa 2012, s. 11.

⁶ R. Pasymowska, *Możliwości wzbogacenia zajęć matematycznych w nauczaniu zintegrowanym*, [w:] *Nauczyciel i uczeń w przestrzeniach szkoły: szkice z teorii i praktyki kształcenia*, red. M. Nowicka, Olsztyn 2002, s. 175.

od działania w rzeczywistości materialnej, a cechą charakterystyczną jest nieodwracalność czynności. Drugą cechą myślenia przedoperacyjnego jest to, że czynności te są izolowane, dziecko nie ujmuje jeszcze stosunków między czynnościami. Uczeń na tym etapie nie dostrzega jeszcze prawa przechodności. Na kolejnym etapie dochodzi do interioryzacji czynności z operacji na konkrety przechodzi do czynności wyobrażonych. Trzeci etap to rozwój odwracalności czynności, przejście do operacji formalnych. Odwracalna czynność to specyficzna cecha operacji, która łączy w jedną operację czynności wobec siebie odwrotne. Owe odwracalne wewnętrzne czynności połączone są w jedną złożoną całość. Przykładami takich czynności są m.in. zbliżyć-oddalić, rozdzielić-połączyć itp.⁷

Jeżeli proces ten przebiega nieprawidłowo uczeń poprawnie poda sumę liczb 13 i 59, ale ma problem ze znalezieniem liczby, która dodana do 13 daje w sumie 72. Podobne przykłady można dostrzec również na wyższych poziomach nauczania matematyki.

Dziecko rozpoczynające naukę w klasie I posiada potrzebę zdobywania wiedzy, przy czym jeszcze bardzo chętnie się bawi i jest ciekawe otaczającego świata. W tym wieku występuje naturalna eksploracja i chęć zrozumienia występujących zjawisk przyrodniczych. W toku rozwoju procesów myślowych bada rzeczywistość przede wszystkim poprzez swoje działanie, a więc wykonuje szereg czynności praktycznych. Nauczanie matematyki już w przedszkolu powinno rozpocząć się od całego szeregu manipulacji związanych z takimi pojęciami, jak liczba, zbiór, powierzchnia, długość itp. Poprawne zrozumienie tych pojęć ułatwi dziecku naukę w szkole podstawowej.

Kształtowanie wiadomości i umiejętności matematycznych powinno polegać przede wszystkim na działaniach manipulacyjnych. W sytuacji rzeczywistości szkolnej „dominuje papierowy sposób prowadzenia matematyki. Preferowane są zeszyty ćwiczeń, w których zadania są przedstawione w formie rysunków, grafów, działań abstrakcyjnych. Dzieci je rozwiązują także na papierze, wpisując w odpowiednie miejsce liczby, znaki działań itp. Papierowy sposób prowadzenia tak ważnego obszaru jest dla nauczyciela niebawale wygodny (uczniowie spokojnie siedzą w ławkach), organizacyjnie łatwy (dzieci mają swoje zeszyty ćwiczeń z obrazkami i zapisanymi tam zadaniami, dlatego nie trzeba przygotowywać pomocy dydaktycznych), poza tym w krótkim czasie można rozwiązać wiele zadań. Edukacja matematyczna może więc odbywać się bez manipulacji liczmanami”⁸.

⁷ J. Nowik, *Kształcenie matematyczne w edukacji wczesnoszkolnej*, dz. cyt., s. 11-12.

⁸ E. Gruszczyk-Kolczyńska, *Wspomaganie rozwoju umysłowego oraz edukacja matematyczna dzieci w ostatnim roku wychowania przedszkolnego i w pierwszym roku szkolnej edukacji. Cele i treści kształcenia, podstawy psychologiczne i pedagogiczne oraz wskazówki prowadzenia zajęć z dziećmi w domu, w przedszkolu i w szkole*, Warszawa 2009, s. 32.

Na początkowym etapie uczenia się matematyki dziecko powinno mieć możliwość samodzielnego wykonywania zadań, działając na konkretnych przedmiotach. Dając mu możliwość pokonywania trudności w zakresie przeprowadzonych czynności praktycznych i intelektualnych pozwalamy mu na doświadczanie satysfakcji i rozwijanie zainteresowania matematyką. W rozwijaniu myślenia matematycznego ważną rolę odgrywa własna aktywność uczniów, która zostanie przedstawiona w dalszej części tego artykułu.

Aktywność matematyczna uczniów

M. Tyszkowa uważa, że „aktywność jest podstawową właściwością istot żywych, sposobem ich istnienia. Poprzez aktywność ludzie regulują swoje stosunki z otaczającym światem. W działalności i poprzez nią człowiek realizuje dążenia i cele, jakie sobie stawia. W działalności przekształcającej i kreującej rzeczywistość w nową, jednostka ludzka osiąga również samorealizację. Aktywność człowieka stanowi też obiekt oddziaływań wychowawczych”⁹. Dziecko jest od samego urodzenia istotą aktywną, a w toku jego rozwoju pojawiają się, organizują oraz doskonalą różne formy aktywności. Zadaniem osób odpowiedzialnych za rozwój i wychowanie jest odpowiednio pokierowanie aktywnością najmłodszych, również i tą związaną z matematyką tak, aby nauka stała się interesująca i dająca dzieciom radość. Nauczyciel, odpowiednio prowadząc zajęcia, dąży do zainteresowania uczniów i wyrabiania u nich umiejętności samodzielnego dochodzenia do pewnych prawd matematycznych. Można mówić wówczas o świadomym i aktywnym uczestnictwie ucznia w procesie nauczania, gdzie zarówno ma miejsce poznanie i opanowanie nowego materiału, jak i wykorzystywanie nabytej wiedzy w sytuacji zadaniowej. Uzyskuje się to wówczas, gdy połączy się wszystkie etapy nauczania matematyki (kształtowanie nowych pojęć, badanie zależności między nimi, syntetyzowanie nabytej wiedzy, osiągnięcie sprawności w działaniach matematycznych) z zagadnieniami praktycznymi. Typowym zadaniem może być przykład z życia wzięty: Jarek ma zajęcia z modelarstwa o godzinie 16.45. Z domu do przystanku idzie 17 minut. Autobus jedzie 12 minut. Od autobusu do Domu Kultury Jarek idzie 5 minut. O której powinien wyjść z domu, aby zdążyć na zajęcia. Uczeń, rozwiązując to zadanie, wyrabia w sobie pogląd o użyteczności zdobywanej wiedzy. Samodzielnie oraz samorzutnie stosuje swoje umiejętności matematyczne, chętnie podejmuje się rozwiązywania problemów matematycznych, a także dostrzega możliwości stosowania matematyki w sytuacjach pozamatem-

⁹ M. Tyszkowa, *Aktywność i działalność dzieci i młodzieży*, Warszawa 1977, s. 6.

tycznych. Taki uczeń cechuje się aktywnością matematyczną, która powinna być nadrzędnym celem w nauczaniu matematyki w edukacji wczesnoszkolnej.

Aktywność matematyczną ucznia można również rozumieć jako „całość jego działań związanych z kształtowaniem pojęć i rozumowań typu matematycznego, stymulowanych przez różnego rodzaju sytuacje i zadania. Może ona obejmować:

- a) czynności konkretne nakierowane na tworzenie lub badanie pojęć oraz rozumowań, o ile są początkowym ogniwem procesu ich kształtowania;
- b) czynności myślowe (wyobrażone i abstrakcyjne), skierowane na kształtowanie pojęć, ich badanie lub posługiwanie się nimi, na kształtowanie i prowadzenie rozumowań, formułowanie i rozwiązywanie problemów teoretycznych lub praktycznych”¹⁰.

W nauczaniu matematyki nadrzędnym celem jest wytworzenie w umyśle dziecka podstawowych pojęć oraz struktur. Przy kształtowaniu pojęć istotne jest opanowanie odpowiednich nazw oraz symboli. Uczeń, operując konkretnym symbolem, powinien rozumieć treść w nim zawartą, własności pojęć, umiejętność wyciągania wniosków, argumentowania oraz uzasadniania swojego stanowiska. Pozwala mu to na świadome oraz aktywne uczestnictwo w zajęciach, prowadzące do wzbogacania jego doświadczeń matematycznych. Podczas przyswajania teorii i utrwalania wiedzy uczeń rozwija takie aktywności, jak:

1. Przejmowanie i asymilowanie informacji matematycznej przekazanej w rozmaitych formach z różnych źródeł.
2. Ćwiczenie podstawowych elementarnych sprawności matematycznych.
3. Rozwiązywanie typowych zadań z zastosowaniem podstawowych metod i technik matematycznych.
4. Posługiwanie się językiem matematycznym w różnych formach.
5. Porządkowanie i pamięciowe utrwalanie wiedzy.
6. Aktywność specyficznie twórczą wykraczającą poza poprzednio wymienione czynności¹¹.

Aktywność matematyczna jest istotnym elementem uczenia i nauczania matematyki. Jak pisze J. Piaget: „każdy normalny uczeń jest zdolny do poprawnego rozumowania matematycznego, jeśli odwołamy się do jego aktywności i jeśli w ten sposób uda się nam usunąć zahamowania emocjonalne, które zbyt często wywołują poczucie niższości na zajęciach z tej właśnie dziedziny. Cała różnica polega na tym, że na większości zajęć

¹⁰ G. Treliński, *Działania prowadzące do wyuczania bezradności matematycznej*, „Nauczanie Początkowe”, (2007/2008)4, s. 49.

¹¹ L. Pawelec, *Rola nauczyciela w kształtowaniu pojęć matematycznych*, „Nauczanie Początkowe”, (2012/2013)2, s. 32.

z matematyki uczniowi narzucana jest dyscyplina intelektualna już całym zorganizowana, którą rozumie lub nie, podczas gdy rozwijając autonomiczną aktywność, zachęca się go do samodzielnego odkrywania stosunków i pojęć¹². Aktywizacja jako działanie dydaktyczno-wychowawcze zmierza do realizacji określonych celów. Przyczynia się również do rozwijania zainteresowań i postaw twórczych u dzieci. Nauczyciel do realizacji celów edukacyjnych stosuje odpowiednie metody kształcenia. Zapewniają one harmonijny i wszechstronny rozwój osobowości uczniów. Nauczanie w efekcie przyjmuje charakter organizowania racjonalnego i efektywnego uczenia się. Wszelkie działania nauczyciela wynikają z założonych celów oraz doboru treści, które zapisane są w podstawie programowej.

Cele i treści kształcenia matematycznego

Cele edukacyjne są to świadome, z góry oczekiwane, planowe a zarazem konkretne efekty edukacji odnoszące się do pożądaných zmian (będących kategorią rozwoju), które zachodzą w wiedzy, umiejętnościach, zdolnościach i zainteresowaniach uczniów pod wpływem procesu dydaktyczno-wychowawczego. Zadania realizowane przez nauczyciela wynikają jasno z celów, natomiast „nadrzędnym celem edukacji wczesnoszkolnej (...) jest wspomaganie dziecka w jego całościowym rozwoju (fizycznym, intelektualnym, estetycznym, emocjonalnym, społecznym) tak, aby było przygotowane, na miarę swoich możliwości, do życia w zgodzie z ludźmi, naturą i samym sobą”¹³. Cele dzielą się na ogólne i operacyjne. Ogólne wyznaczają kierunki dążeń oraz perspektywę pracy wychowawczo-dydaktycznej w szkole w dłuższym wymiarze czasowym. Operacyjne to konkretne, powiązane z sobą, zaplanowane i zamierzone, krótko trwające działania, prowadzące do określonych efektów edukacyjnych. Cele operacyjne składają się z trzech elementów. Pierwszy to zachowanie końcowe, określające zamierzone efekty wychowania i nauczania (co dziecko powinno umieć, zrobić, czym wykazać się itd.). Drugi to warunki przejawiania zachowania końcowego (opis sytuacji zachowania wychowanka, pomoce, narzędzia, przybory, konieczność ukończenia powierzonych zadań). Trzeci to standardy osiągnięcia zachowania końcowego (dostarcza obiektywnego kryterium dla oceny postępowania, działania, zachowania dziecka).

Podstawą konstruowania celów dydaktyczno-wychowawczych jest obowiązująca *Podstawa programowa wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół* zatwierdzona 23.12.2008 r. wraz z załącznikami.

¹² Z. Semadeni (red.), *Nauczanie początkowe matematyki*, t. 1, Warszawa 1981, s. 62.

¹³ J. Karbowiczek, *Zmiany w edukacji wczesnoszkolnej po wprowadzeniu reformy systemu oświaty*, Częstochowa 2008, s. 109.

Podstawa programowa jako najważniejszy dokument wyznaczający kierunek zintegrowanej edukacji wczesnoszkolnej jest też „dokumentem określającym obowiązkowe treści kształcenia, które muszą znaleźć swoje odzwierciedlenie w programach nauczania oraz stanowiącym podstawę do tworzenia programów autorskich opartych o różne założenia filozoficzne i psychologiczne odnoszące się do rozwoju człowieka. Opisuje ona proces wspomagania rozwoju dzieci”¹⁴.

W *Podstawie programowej* za najistotniejsze cele ogólne matematyki w klasach I-III uważa się:

- wspomaganie rozwoju umysłowego każdego dziecka, w szczególności tworzenia się w jego umyśle odpowiednich schematów poznawczych i rozwijanie myślenia operacyjnego;
- zebranie przez dziecko doświadczeń niezbędnych do ukształtowania się odpowiednich pojęć matematycznych;
- stymulowanie rozumowań matematycznych, samodzielności myślenia i krytycyzmu (na miarę dziecka);
- rozwijanie umiejętności matematyzowania łatwych zagadnień zaczerpniętych z otaczającej dziecko rzeczywistości i stosowania nabytej wiedzy w konkretnych sytuacjach.

Uszczegóławianie celów ogólnych polega również na kształtowaniu konkretnych umiejętności i kompetencji. Kompetencja to zakres wiedzy, umiejętności, odpowiedzialności, uprawniający jednostkę do wykonywania określonej czynności. Nabywanie kompetencji jest procesem ciągłym, długotrwałym wymagającym dużego nakładu pracy zarówno ze strony ucznia, jak i nauczyciela. W procesie planowania zajęć dydaktycznych cele szczegółowe mają charakter czynnościowy, tj. wyrażają czynności jakie ma wykonać uczeń, aby został zrealizowany zamierzony cel. Zaplanowane cele nauczania tworzą strukturę hierarchiczną, nazywaną taksonomią celów nauczania. Interesująca taksonomia celów kształcenia elementarnej matematyki została zaproponowana przez J. Nowika, którą prezentuje tabela 1 i 2.

Tabela 1. Przyswajanie informacji matematycznych i operowanie nimi.

Kategoria celu – umiejętności i definicja	Uczeń potrafi na przykład:
<p>1.1. Posługiwanie się językiem matematycznym Uczeń świadomie posługuje się terminologią matematyczną i informacjami niezbędnymi w dalszym zdobywaniu wiedzy na poziomie danego szczebla nauczania i odpowiednim do jego możliwości. Wypowiada swoje spostrzeżenia i opisuje swoje poczynania matematyczne na poziomie odpowiednim do jego możliwości.</p>	<ul style="list-style-type: none"> – posługiwać się nazwami liczebników, jednostek miary, długości, masy, zapisywać liczby cyframi i słowami; – rozpoznawać i nazywać figury geometryczne; przy wypisywaniu danych zadania stosować symbole matematyczne; – opisać słownie wykonywane działania; przedstawić tok postępowania, który doprowadził go do rozwiązania zadania; określić zbiór liczb spełniających dany warunek.
<p>1.2. Stosowanie algorytmów, praw, twierdzeń i definicji Uczeń wykorzystuje do rozwiązania zadania odpowiedni algorytm, twierdzenie, własność, definicję oraz przeprowadza proste rozumowanie matematyczne.</p>	<ul style="list-style-type: none"> – podstawić dane liczbowe do wzoru; – rozwiązać proste równanie; – rozwiązać zadanie wymagające bezpośredniego posłużenia się algorytmem; – rozpoznać definicje, równoważne pojęcia.
<p>1.3. Umiejętność korzystania z różnych źródeł informacji Uczeń wyszukuje źródło zawierające potrzebną informację i wykorzystuje ją.</p>	<ul style="list-style-type: none"> – wskazać źródło zawierające potrzebne informacje; – znaleźć właściwą tabelę w podręczniku, encyklopedii; – znaleźć odpowiednią informację w spisie treści.
<p>1.4. Rozumienie tekstu matematycznego Uczeń umie śledzić rozumowania i dowody zawarte w tekście oraz ujmować związki między częściami tekstu.</p>	<ul style="list-style-type: none"> – odczytać dane z rysunku, tabeli; – uzyskać informację za pomocą kalkulatora; – przeczytać ze zrozumieniem tekst matematyczny i opowiedzieć treść – streścić go; – wyodrębnić zasadnicze części tekstu; – zamienić formę zadania na równoważną i przedstawić treść zadania w formie rachunkowej (równanie, działanie) i odwrotnie,

Tabela 2. Posługiwanie się matematyką

Kategoria celu – umiejętności	Uczeń potrafi na przykład:
<p>U.1. Umiejętność analizowania i rozwiązywania zadań typowych Uczeń wyodrębnia odpowiednie elementy i zależności oraz wykorzystuje je do rozwiązywania zadania.</p>	<ul style="list-style-type: none"> – analizować treść zadania, wyodrębniając nie-wiadome oraz informacje niezbędne do – znalezienia jego rozwiązania; – zilustrować treść zadania; – wykonywać działania w rachunku pamięciowym i pisemnym z wykorzystaniem odpowiednich własności; – rozwiązywać proste zadania, wykonywać proste konstrukcje geometryczne.
<p>U.2. Umiejętność stosowania metod matematycznych do rozwiązywania zadań praktycznych Uczeń potrafi rozwiązać problem praktyczny wymagający wyboru informacji i stosowania technik matematycznych (wiadomości, umiejętności) w sytuacji pozaszkolnej.</p>	<ul style="list-style-type: none"> – wykonywać obliczenia związane z zakupami (cena, ilość, wartość) i porównać wartości pieniężne; – zmierzyć za pomocą linijki długość wskazanego przedmiotu; – oszacować możliwość zakupów w zależności od posiadanych zasobów pieniężnych; posłużyć się kalendarzem do ustalenia wskazanej daty oraz obliczenia upływu czasu; – posługiwać się rozkładem jazdy i obliczyć czas podróży; – obliczyć zużycie materiałów niezbędnych do przeprowadzenia remontu; – zaplanować powierzchnię zasiewów na grządce w ogródku.
<p>U.3. Umiejętność analizowania i rozwiązywania problemów Uczeń dostrzega problem zawarty w zadaniu i rozwiązuje go lub sam na podstawie zbioru i informacji formułuje problem i rozwiązuje go.</p>	<ul style="list-style-type: none"> – określić, jakie informacje są potrzebne do rozwiązania zadania; – zbudować model sytuacji rzeczywistej; – rozwiązywać zadania nietypowe, np. mające wiele rozwiązań lub w których trzeba dostrzec brakujące elementy i znaleźć je w odpowiednich źródłach.

<p>U.4. Umiejętność porównywania, uogólniania i dowodzenia Uczeń uogólnia rozwiązane zdania, dostrzega analogie i zależności między różnymi obiektami matematycznymi, uzasadnia poprawność; operacji matematycznych, przeprowadza dowody.</p>	<p>– określić warunki istnienia rozwiązania zadania; – porównać działania na zbiorach i liczbach; – uzasadnić wybór metody rozwiązania zadania.</p>
---	---

Źródło: J. Nowik, *Kształcenie matematyczne w edukacji wczesnoszkolnej*, s. 52-53.

Podstawa programowa jest drogowskazem dla nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej, daje ona ogólne wytyczne bez zbędnego narzucania czy też sugerowania rozwiązań metodycznych. Obowiązująca Podstawa programowa¹⁵ formuje treści w kategoriach umiejętności, jakie powinien opanować uczeń na zakończenie danego etapu edukacji, ułatwiając pracę nauczycielowi w planowaniu procesu dydaktyczno-wychowawczego.

Treści zawarte w Podstawie mają charakter umiejętności, które uczeń ma opanować w procesie nauczania – uczenia się. Konieczne jest jednak połączenie ich z kompetencjami, jakie powinien uczeń nabyć, by w efekcie zbudować swoją strukturę matematycznej wiedzy.

Metody nauczania matematyki

W edukacji matematycznej możemy dostrzec trzy koncepcje nauczania:

- czynnościowego nauczania-uczenia się,
- problemowego,
- realistycznego.

Na czym polegają wyżej wymienione metody i w jaki sposób są realizowane? Pierwsza koncepcja, czyli „czynnościowe nauczanie matematyki jest postępowaniem dydaktycznym uwzględniającym stale i konsekwentnie operatywny charakter matematyki równoległe z psychologicznym procesem interioryzacji prowadzącym od czynności konkretnych i wyobrażeńowych do operacji abstrakcyjnych”¹⁶. W. Siwek podaje że czynnościowe nauczanie matematyki opiera się, po pierwsze, „na wydobyciu przez analizę teoretyczną z materiału nauczania podstawowych operacji w każdej definicji, twierdzeniu, dowodzie, oraz na świadomym organizowaniu sytuacji pro-

¹⁵ Podstawa programowa kształcenia ogólnego dla szkół podstawowych. Dziennik Ustaw z 2009 r. Nr 4, poz. 17 z dnia 15 stycznia 2009.

¹⁶ H. Siwek, *Czynnościowe nauczanie matematyki*, Warszawa 1998, s.14-15.

blemowych sprzyjających procesowi interioryzacji i kształtowaniu myślenia matematycznego ucznia jako specyficznego działania, jako swobodnego i świadomego posługiwania się przyswajanymi stopniowo operacjami oraz na konsekwentnym stosowaniu zabiegów dydaktycznych, mających na celu zapewnienie prawidłowości i efektywności tego procesu¹⁷.

W nauczaniu czynnościowym założeniem podstawowym jest aktywność ucznia oraz wspierająca, doradcza i inspiratorska rola nauczyciela. Koncepcja ta zakłada tworzenie i odkrywanie matematyki przez uczniów. Nauczanie czynnościowe to inaczej tworzenie pojęć, a nie reguł i algorytmów. Dużą rolę odgrywają tu pojęcia, definicje, prawa, twierdzenia oraz rozumowanie wykonanych czynności, a dopiero na drugim planie jest sformułowanie i zastosowanie odpowiednich algorytmów. Celem tej metody jest zbudowanie przez ucznia wiedzy operatywnej.

Natomiast, druga koncepcja, a wraz z nią odrębne metody polegają na tworzeniu sytuacji problemowej. Nauczanie problemowe pojawia się w momencie napotkania trudności, której nie można rozwiązać za pomocą znanych schematów, reguł, praw czy algorytmów. „Szczególnie ważne w procesie wychowania dziecka są zabawy, zajęcia i gry które swoją treścią wiążą się z codziennym życiem i nauką, pozwalają one dzieciom na: wyzwolenie motywacji i zaangażowania, zainteresowanie treścią, nowatorski przebieg, uzyskane wyniki, rywalizację indywidualną i grupową”¹⁸. Postępowanie w metodzie problemowej jest podobne do metody czynnościowej i polega na organizowaniu sytuacji problemowych prowadzących od czynności konkretnych przez wyobrażone do abstrakcyjnych. Punktem wyjścia jest tu pytanie lub zadanie pobudzające do aktywnego działania uczniów.

Koncepcja realistycznego nauczania matematyki (*Realistic Mathematics Education*) powstała pod wpływem idei i poglądów Hansa Freudenthala i jest rozwijana w Instytucie H. Freudenthala w Utrechcie (Holandia). „Zgodnie z tą koncepcją uczniowie powinni budować i dalej rozwijać pojęcia oraz operacje matematyczne na drodze naturalnej matematyzacji¹⁹, w sytuacjach dla ucznia sensownych, bliskich jego doświadczeniom. Nauczanie powinno wychodzić od sytuacji rzeczywistych i być nastawione na matematyzację pionową, czyli budowanie pojęć i twierdzeń szkolnej matematyki na kolejnych piętach abstrakcji”²⁰.

¹⁷ Tamże, s. 14-15.

¹⁸ J. Karbowniczek, U. Pastuszka, *Gry i zabawy matematyczne na wakacjach*, „Życie Szkoły”, (2006)6, s. 41-42.

¹⁹ Matematyzacja to niededukcyjne rozumowanie, które rozpoczyna się od badania pewnej sytuacji (realnej, wyobrażonej, a nawet abstrakcyjnej), dalej obejmuje czynności związane z wydzieleniem w tej sytuacji obiektów i związków między nimi, reprezentowanie ich w różny sposób i wreszcie opisywanie ich językiem matematyki. Otrzymany w wyniku matematyzacji opis nazywa się modelem matematycznym tej sytuacji.

²⁰ H. Siwek, *Dydaktyka matematyki. Teoria i zastosowanie w matematyce szkolnej*, Warszawa 2005, s.107.

W tej koncepcji uczniowie odkrywają, budują i rozwijają swoją matematykę na drodze naturalnej matematyzacji poprzez aktywne działanie na konkretach w naturalnych warunkach, co wzbogaca ich wiedzę i doświadczenie życiowe. Stosując tę metodę, zajęcia organizowane są w następujący sposób:

- Wybieramy się z dziećmi do miasteczka komunikacyjnego (wytyczonego na boisku szkolnym albo w parku). Zapoznujemy się z układem dróg, opisujemy ten układ słowami, wytyczamy start i metę. Wysłuchujemy opinii dzieci na temat, która z nich jest najkrótsza (jak to rozstrzygnąć, jak mierzyć krokami), która najbezpieczniejsza, bezkolizyjna.
- Rozdajemy grupom dzieci (2-3 osobowym) bloki rysunkowe i pisaki bądź karty z rysunkami przedstawiającymi układ dróg miasteczka (plany schematyczne). Jedne grupy starają się samodzielnie przedstawić na kartce plan sytuacyjny, inne tylko wybierają rysunek, który ich zdaniem przedstawia taki plan. Wysłuchujemy uzasadnień wyboru planu, najważniejszych cech dróg. Następnie uczniowie zaznaczają na swoich planach kolorowymi strzałkami wybrane drogi i opisują liczbami ich długości mierzone krokami.
- W klasie, dzieci analizują w grupach plany obrazkowe, które otrzymali od nauczyciela; podkreślają czytelność planu, obiekty i punkty orientacyjne na nich zaznaczone, przejścia dla pieszych, drogi najkrótszą, bezpieczną, zaznaczają strzałkami²¹.

Współczesna dydaktyka sprzyja takim koncepcjom nauczania, gdzie dziecko aktywnie uczestniczy w procesie nauczania-uczenia się. W poszukiwaniu złotego środka wydaje się najkorzystniejszym rozwiązaniem stosowanie w pracy z dziećmi różnych koncepcji edukacyjnych.

Środki dydaktyczne wykorzystywane na zajęciach z matematyki

Ważną rolę w procesie uczenia się matematyki przez dziecko odgrywają manipulacyjne środki dydaktyczne, służące do wykonywania czynności ułatwiających zilustrowanie lub rozwiązanie zadania matematycznego. Wyróżniamy dwa rodzaje takich pomocy²²:

- środki naturalne, zaczerpnięte z repertuaru zabawek lub z życia codziennego: liczmany (którymi mogą być np. zakrętki do kartonów z sokiem lub kasztany), lalki, samochodziki, przybory do jedzenia, puste butelki po napojach, sznurki i wiele innych, zależnie od inwencji dzieci i dorosłych;
- środki ustrukturuwane matematycznie. Część z nich została opracowana specjalnie dla celów edukacyjnych, jak np. klocki Cuisenaire'a, figury geometryczne w zestawie typu Dienes, tekturowe zegary, zaba-

²¹ G. Trelińskiego, *Realistyczne nauczanie matematyki*, „Nauczanie Początkowe”, (2007/2008) nr 4, s. 39.

²² Z. Semedeni, *Matematyka w edukacji początkowej jako fundament całej matematyki szkolnej*, „Nauczanie Początkowe”, (2012/2013)1, s. 14.

wowe banknoty i monety, a także środki dysponujące odpowiednią strukturą matematyczną przydatną do zajęć np. dziecięce klocki do budownictwa, drewniane obręcze gimnastyczne, a także patyczki jednakowej długości (drewniane lub plastikowe), służące jako liczniki lub np. do układania figur.

Środki dydaktyczne mają za zadanie stworzyć w umyśle dziecka schematy poznawcze. Dochodzi do tego poprzez wykonywanie przez dzieci odpowiednich czynności manipulacyjnych. Odbywa się to pod kierunkiem nauczyciela w celu wykonania konkretnego zadania, by osiągnąć zamierzony cel. Uczeń, licząc kamyczki, układając Tangram, rzucając kostkami do gry, nabywa umiejętności przejścia od operowania konkretnymi do czynności wyobrażeniowych.

Nauczyciel, chcąc rozwijać ciekawość matematyczną dzieci, powinien korzystać ze wszystkich dostępnych środków, kształtujących wszechstronne zainteresowania poznawcze ucznia. Nie zapominając o walorach dydaktycznych naturalnych pomocy naukowych np. kamyczków, koralików, patyczków i wielu innych rzeczy posiadających ogromne walory poznawcze, znanych dziecku z jego naturalnego środowiska.

Rozwijanie uzdolnień w matematyce

Rozwijanie zdolności jest dużym wyzwaniem dla nauczyciela. Matematyka przez większość ludzi uznawana jest za przedmiot trudny. Prawidłowe wprowadzenie ucznia w klasy I-III w świat pojęć liczbowych i geometrycznych, wyrobienie pozytywnego stosunku do matematyki jest w dużej mierze gwarancją powodzenia w starszych klasach. Strach przed matematyką może być powodem stresu i zaniżonej samooceny, a w konsekwencji przyczyną powstania niepowodzeń szkolnych. W związku z tym rodzi się pytanie: W jaki sposób rozwijać zdolności i zainteresowania matematyczne, aby były one trwałe, a nie tylko przelotne?

W definicjach zdolności „ujawniają się m.in. w procesach poznawczych, w konkretnej dziedzinie i w specyficznym polu działania i jest indywidualną właściwością osobowości człowieka, której nie można sprowadzić do wykształconych nawyków, ale dzięki której można kształtować różnego rodzaju nawyki, sprawności i umiejętności”²³.

Zdolności są również potencjałem tkwiącym w dziecku i czekającym na odpowiedni rozwój, na który oprócz genetycznych predyspozycji oddziałuje środowisko. „Poszczególne jednostki mają specyficzny, indywidualny układ zdolności i uzdolnień, których rozwój jest uwarunkowany zarówno wpływami zewnętrznymi, jak i wewnętrznymi możliwościami

mi. Każdy człowiek posiada bowiem określony poziom inteligencji, uzdolnień kreatywnych oraz specjalnych. W zależności od warunków, w jakich żyje, oraz obowiązków i potrzeb zdolności, które mogą się ujawniać lub pozostawać w ukryciu. Przeważnie w dogodnych warunkach ujawniają się, chociaż nigdy w gotowej i skończonej postaci. Są jak diament, którego obróbka wymaga cierpliwości i mistrzowskich rąk²⁴.

Role nauczyciela jest więc wspieranie zainteresowań dzieci matematyką rozwijanie uzdolnień od początku ich edukacji szkolnej. Tworząc dzieciom kreatywne warunki uczenia się, nauczyciel stwarza możliwość rozwijania naturalnej dziecięcej ciekawości, poszukiwania informacji, obserwacji, formułowania hipotez i udzielania własnych odpowiedzi. Zaaranżowane przez niego sytuacje dydaktyczne zarówno w zajęciach szkolnych, jak i dodatkowych (koła zainteresowań), pozwalają dziecku eksperymentować, poznawać, doświadczać, ale przede wszystkim samodzielnie działać i doznawać satysfakcji.

Zdolności możemy podzielić na:

- ogólne (inteligencja, myślenie, spostrzeganie, zapamiętywanie itd.).
- specjalne (związane z określoną dziedziną, np. muzyczne, plastyczne itd.).

W matematyce dzieci uzdolnione²⁵:

- zdecydowanie szybciej przechodzą od konkretnych do uogólnień. Wcześniej od rówieśników rozumują operacyjnie na poziomie konkretnym i posługują się symbolami matematycznymi;
- mają zadziwiające poczucie sensu w sytuacjach życiowych i zadaniach szkolnych, które wymagają liczenia i rachowania, porządkowania, ustalania zależności itp.;
- potrafią się skupić przez dłuższy czas na złożonych zadaniach, wykazując się zadziwiającą pomysłowością i trafnością rozumowania;
- są stanowcze w dążeniu do rozwiązania zadania i zniechęcają się, gdy kolejno podejmowane próby nie przynoszą spodziewanego rezultatu;
- same wyszukują sytuację, w których trzeba liczyć, rachować, mierzyć i sensownie organizować otoczenie;
- dążą do matematyzowania tego, co ich otacza: ciągle chcą coś liczyć i mierzyć, porównywać wielkości, ustalać proporcje itd.

Jeżeli odpowiednio wcześnie dostrzeżemy u dziecka zadatki i będziemy je stymulować, wówczas mogą one się rozwinąć w zdolności.

²⁴ K. Bieluga, *Rozpoznawanie i stymulowanie cech inteligencji oraz myślenia twórczego w domu i w szkole*, Kraków 2009, s.16.

²⁵ Tamże, s.14.

Podsumowanie

Nauczyciel w swojej pracy dydaktycznej powinien zwracać uwagę zarówno na dzieci uzdolnione, jak i na te, które nie radzą sobie z matematyką. Ma również pamiętać o tym, że głównym źródłem niepowodzeń u dzieci w uczeniu się matematyki jest niedojrzałość operacyjnego rozumienia na poziomie konkretnym w momencie rozpoczęcia przez nich nauki. Biorąc po uwagę fakt, że dzieci rozwijają się w różnym tempie, należy taki fakt uwzględnić zwłaszcza w klasie pierwszej. Praca dydaktyczna nauczyciela powinna zmierzać w kierunku przeciwdziałania powstaniu blokady emocjonalnej czy wyuczonej bezradności matematycznej u dzieci.

Matematyka daje podstawy współczesnej technologii, jest ona niezbędna do właściwego funkcjonowania w tak zaawansowanym technologicznie społeczeństwie. Zintegrowana edukacja wczesnoszkolna polega na stworzeniu w umyśle ucznia holistycznego obrazu rzeczywistości, który powinien uświadamiać mu praktyczność i wymierność wiedzy matematycznej, pozwalającej pracować i rozwiązywać problemy. Matematyka to również dostrzeżenie zależności, wnioskowanie, argumentowanie uzasadnianie czy też uogólnianie, procesy te nazywane są często myśleniem matematycznym. Podstawą nauczania matematyki jest stworzenie dziecku sytuacji, w której wykonując określone czynności, buduje strukturę matematyczną. W wyzwaniu i organizowaniu aktywności pomogą nauczycielowi nowoczesne metody edukacyjne oraz środki dydaktyczne. Pomoce te potrzebne są w matematyzowaniu sytuacji życiowych ucznia. Wszystkie te aspekty metodyczne dążą po pierwsze do poprawnego pod względem merytorycznym przekazania dziecku treści matematycznych, objętych programem nauczania oraz do rozwijania zainteresowania matematyką, po drugie do przeciwdziałania powstawaniu trudności. Nauczanie matematyki to świadomy i zorganizowany proces, którego kierowniczą rolę sprawuje nauczyciel. Czuwając nad prawidłowym przebiegiem tegoż procesu, wdraża on ucznia do systematycznej pracy, osiąga zamierzone cele i uczy przetrwać wszelkie trudności.

Bibliografia

Bieluga K., *Rozpoznawanie i stymulowanie cech inteligencji oraz myślenia twórczego w domu i w szkole*, Oficyna Wydawnicza „Impuls”, Kraków 2009.

Fechner-Sędzicka I., Ochmańska B., Odrobina W., *Rozwijanie zainteresowań i zdolności matematycznych klas I-III szkoły podstawowej*. Poradnik dla nauczyciela, Ośrodek Rozwoju Edukacji, Warszawa 2012.

Gruszczyk-Kolczyńska E., *Niepowodzenia w uczeniu się matematyki u dzieci klas początkowych. Diagnostyka i terapia*, Uniwersytet Śląski, Katowice 1985.

Gruszczyk-Kolczyńska E., *Wspomaganie rozwoju umysłowego oraz edukacja matematyczna dzieci w ostatnim roku wychowania przedszkolnego i w pierwszym roku szkolnej edukacji. Cele i treści kształcenia, podstawy psychologiczne i pedagogiczne oraz wskazówki prowadzenia zajęć z dziećmi w domu, w przedszkolu i w szkole*, Edukacja Polska, Warszawa 2009.

Jąder M., *Efektywne metody pracy z dziećmi*, Oficyna Wydawnicza „Impuls”, Kraków 2009.

Karbowniczek J., Kwaśniewska M., Surma B., *Podstawy pedagogiki przedszkolnej z metodyką*, WAM, Kraków 2011.

Karbowniczek J., Pastuszka U., *Gry i zabawy matematyczne na wakacjach*, „Życie Szkoły”, (2006)6, s. 40-46.

Karbowniczek J., *Zmiany w edukacji wczesnoszkolnej po wprowadzeniu reformy systemu oświaty*, AJD, Częstochowa 2008.

Klus- Stańska D., Kalinowska A., *Rozwijanie myślenia matematycznego młodszych uczniów*, Wydawnictwo Akademickie „Żak” Warszawa 2004.

Mason J., Burton L., Stacey K., *Matematyczne myślenie*, WSiP, Warszawa 2005.

Nowik J., *Kształcenie matematyczne w edukacji wczesnoszkolnej*, Wydawnictwo NOWIK Sp.j., Opole 2011.

Pasymowska R., *Możliwości wzbogacenia zajęć matematycznych w nauczaniu zintegrowanym*, [w:] *Nauczyciel i uczeń w przestrzeniach szkoły: szkice z teorii i praktyki kształcenia*, red. M. Nowicka, Wydawnictwo Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego 2002.

Pawelec L., *Rola nauczyciela w kształtowaniu pojęć matematycznych*, „Nauczanie Początkowe”, (2012/2013)2, s. 24-33.

Semadeni Z., red., *Nauczanie początkowe matematyki*, t. 1, WSiP, Warszawa 1981.

Semedeni Z., *Matematyka w edukacji początkowej jako fundament całej matematyki szkolnej*, „Nauczanie Początkowe”, (2012/2013)1, s. 7-43.

Siwek H., *Czynnościowe nauczanie matematyki*, WSiP, Warszawa 1998.

Siwek H., *Dydaktyka matematyki. Teoria i zastosowanie w matematyce szkolnej*, WSiP, Warszawa 2005.

Stawecka A., *Rozwój aktywności poznawczej dzieci w wieku wczesnoszkolnym*, „Teoretyczne Podstawy Edukacji Wczesnoszkolnej”, (2009/2010)3, s. 7-16.

Treliński G., *Działania prowadzące do wyuczenia bezradności matematycznej*, „Nauczanie Początkowe”, (2007/2008)4, s. 46-61.

Tyszkowa M., *Aktywność i działalność dzieci i młodzieży*, WSiP, Warszawa 1977.

Streszczenie

Współczesna dydaktyka matematyki w edukacji wczesnoszkolnej wiele uwagi poświęca problemowi, jak uczyć, aby uprzystępnąć dzieciom, znajdującym się na poziomie myślenia praktycznego i obrazowo-ruchowego, poznanie treści pojęć matematycznych z natury swej abstrakcyjnych. Do realizacji zamierzonych celów, oprócz metod nauczania, nauczyciel potrzebuje także odpowiednich form i środków dydaktycznych. W celu uatrakcyjnienia nauki warto jest korzystać z różnych pomocy naukowych, zarówno tych dostępnych w sklepach, jak i tych przygotowanych przez same dzieci. Dzięki nim uczniowie rozwijają swoją aktywność, samodzielność oraz twórczość i pomysłowość. Nauczyciel jest wówczas kreatorem czasu i przestrzeni pracy dziecka. Niniejszy artykuł porusza wszystkie te aspekty procesu nauczania matematyki w edukacji wczesnoszkolnej.

Słowa kluczowe: matematyka, myślenie matematyczne, aktywność matematyczna, cele i treści nauczania, metody nauczania, koncepcje nauczania, środki dydaktyczne, zdolności matematyczne, trudności w nauczaniu.

Methodological aspects of the familiarization of students from classes I to III with mathematical knowledge

Summary

Contemporary mathematics teaching in early childhood education pays much attention to the problem of how to teach in order to facilitate a child located at the practical thinking level and image-motor content cognition of mathematical concepts that are abstract by nature. To achieve those objectives, in addition to teaching methods, the teacher also needs appropriate forms and means of teaching. In order to make the teaching more attractive it is good to use a variety of teaching aids, those available in stores, as well as those prepared by the children themselves. Thanks to them, students develop their activity, independence, creativity and ingenuity. The teacher acts then as the creator of time and space for child own work. This article covers all these general aspects of teaching mathematics in early childhood education.

Keywords: mathematics, mathematical thinking, mathematical activity, aims and content of teaching, teaching methods, teaching concepts, teaching aids, mathematical ability, difficulty in teaching.