

# Andrzej Koch, Tomasz Wieja

---

## Cienie obiektów geometrycznych na powierzchni topograficznej w odwzorowaniu rzutu cechowanego

---

Acta Scientifica Academiae Ostroviensis nr 27, 55-64

---

2007

Artykuł został zdigitalizowany i opracowany do udostępnienia w internecie przez Muzeum Historii Polski w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego. Artykuł jest umieszczony w kolekcji cyfrowej [bazhum.muzhp.pl](http://bazhum.muzhp.pl), gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach dozwolonego użytku.

Andrzej Koch<sup>1</sup>, Tomasz Wieja<sup>2</sup>

## CIENIE OBIEKTÓW GEOMETRYCZNYCH NA POWIERZCHNI TOPOGRAFICZNEJ W ODWZOROWANIU RZUTU CECHOWANEGO

Promienie świetlne napotykające na swojej drodze dowolny obiekt naturalny lub geometryczny powodują na tle (płaszczyźnie, powierzchni algebraicznej lub nieregularnej, dowolnej strukturze itp.) powstanie *cienia*. Zależnie od tego, czy promienie świetlne są równoległe, czy zbieżne, rozróżniamy *oświetlenie równoległe* lub *centralne*.

Przy wyznaczaniu cienia od dowolnej figury na tło należy stosować następujące zasady:

1. w celu określenia cienia od punktu na powierzchnię należy przez ten punkt przeprowadzić promień świetlny i skonstruować punkt przebicia powierzchni tym promieniem
2. granica wyznaczonego cienia jest cieniem granicy części oświetlonej i nieoświetlonej rozpatrywanej figury
3. w celu wyznaczenia cienia od linii prostej na powierzchni (płaszczyźnie) należy przez prostą przeprowadzić *płaszczyznę promieni świetlnych* (zawierającą te promienie) i wyznaczyć linię przecięcia się tej płaszczyzny i powierzchni.

Dla oświetlenia równoległego przyjmujemy wektor  $k$ , który określa kierunek i zwrot promieni świetlnych. W przypadku promieni słonecznych zakłada się, że jest to właśnie oświetlenie równoległe, to znaczy że źródło światła (*punkt świecący*) jest punktem niewłaściwym, co jest zrozumiałe ze względu na ogromną odległość Słońca od Ziemi.

W przypadkach, gdy punkty świecące ustalone są sztucznie i lokalnie (lampy, latarnie itp.) mamy do czynienia z oświetleniem centralnym to jest takim, w którym źródło światła jest punktem właściwym.

Punkt nazywamy *oświetlonym*, jeżeli pada nań promień świetlny, natomiast jego *cieniem rzuconym* na tło jest jego rzut równoległy lub środkowy w zależności od tego, czy punkt świecący jest punktem niewłaściwym, czy właściwym.

---

<sup>1</sup> Wydz. Matematyki Stosowanej AGH Kraków

<sup>2</sup> Wydz. Matematyki Stosowanej AGH Kraków

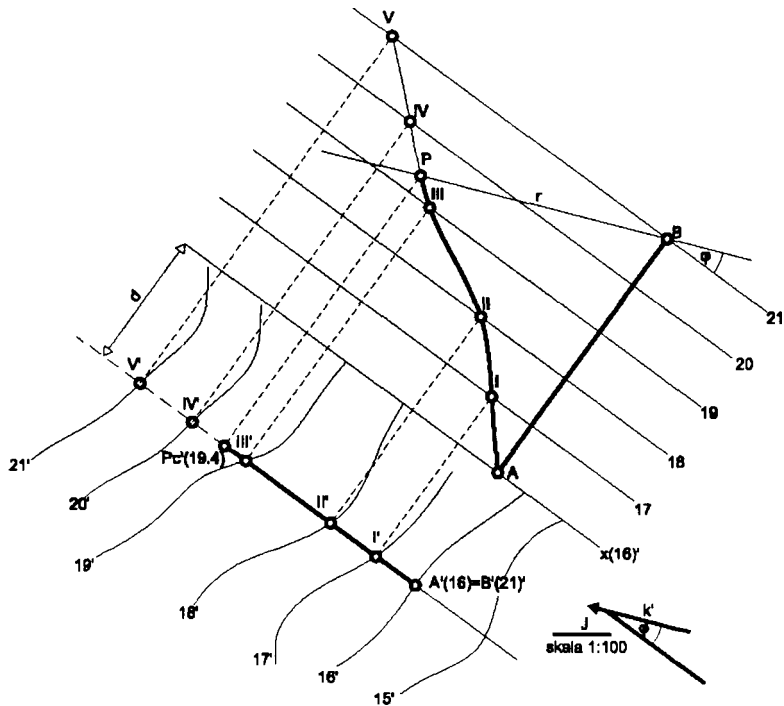
*Cieniem rzuconym* obiektu na tło nazywamy zbiór cieni rzuconych oświetlonych punktów tego obiektu.

W literaturze zagadnienia dotyczące cieni są przedstawiane na ogół w rzucie środkowym i w rzutach Monge'a, a także w aksonometrii. W niniejszej pracy problematykę tą zilustrowano w odwzorowaniu rzutu cechowanego kierując się przekonaniem, że ten rodzaj odwzorowania jest szczególnie użyteczny i szeroko stosowany w kartografii.

Poniżej demonstrowane ilustracje omawianego zagadnienia są prostymi przykładami, których celem jest pokazanie samej idei i metod wyznaczania cieni figur na powierzchni topograficznej. Zastosowano tutaj – częściowo w celach porównawczych - zarówno oświetlenie równoległe jak i centralne. Z kolei powierzchnia topograficzna została wybrana jako tło, ponieważ stanowi ona naturalne środowisko działalności geodety i kartografa.

Obiekty w terenie rzucające cień na jego powierzchnię mogą być dowolnie usytuowane, posiadać złożone kształty i różne rozmiary. Ponadto powierzchnia terenu, jako powierzchnia przeważnie nieregularna, przyjmować może zaskakujące formy. W takich przypadkach określenie zasięgu i kształtu cienia rzuconego może okazać się zadaniem skomplikowanym koncepcyjnie i graficznie. Jednakże niezależnie od stopnia komplikacji zarówno obiektu jak i terenu, niżej opisane metody pozostają niezmiennie. Polegają one na znanych geometrycznych działaniach na powierzchni topograficznej, takich jak wyznaczanie punktu przebicia tej powierzchni przez prostą, znajdowanie linii przekroju płaszczyzny z powierzchnią terenu, konstrukcji profilu terenu itp.

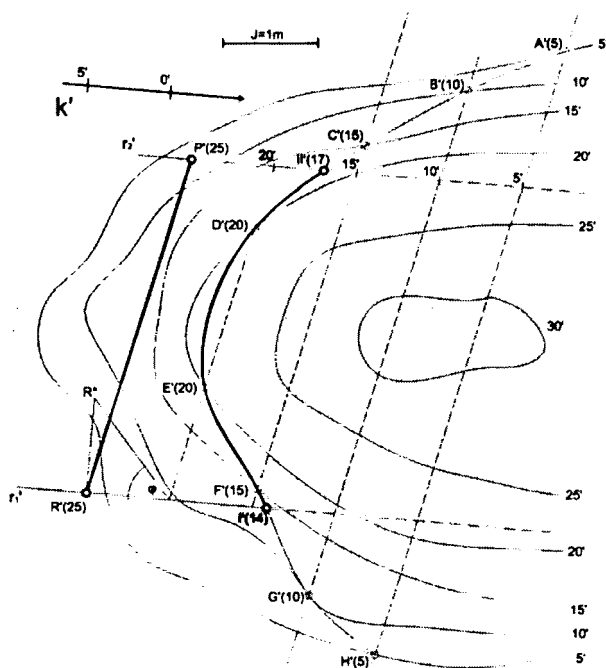
Niech dany będzie fragment powierzchni topograficznej, pionowy odcinek  $AB$  oraz wektor  $k$  określający kierunek i zwrot promieni oświetlenia równoległego (rys. 1).



Rys.1. Wyznaczenie cienia rzuconego na powierzchnię topograficzną przez pionowy odcinek AB w oświetleniu równoległym

Cień rzucony od tego odcinka na przyjętą powierzchnię leży w płaszczyźnie  $\varepsilon$  przechodzącej przez AB i równoległej do  $k$ . Za pomocą metody transformacji znajdujemy profil terenu, czyli przekrój naszej powierzchni płaszczyzną  $\varepsilon$ . Od najniższej płaszczyzny warstwowej  $\pi_{16}$  kreślimy w odległości co 1cm (jednostka w przyjętej skali) kolejne takie płaszczyzny i znajdujemy punkty I – V przebiecia płaszczyzny profilowej  $\varepsilon$  przez warstwy terenu, jak również punkt P przebiecia powierzchni terenu promieniem świetlnym przechodzącym przez punkt B. Płaska linia krzywa AB określa szukany cień, a jej rzut cechowany  $A'(16)B'(19,4)$  jest odcinkiem prostej. Na rysunku pokazano także kąt  $\varphi$  nachylenia wektora  $k$  do poziomu (i wszystkich płaszczyzn warstwowych).

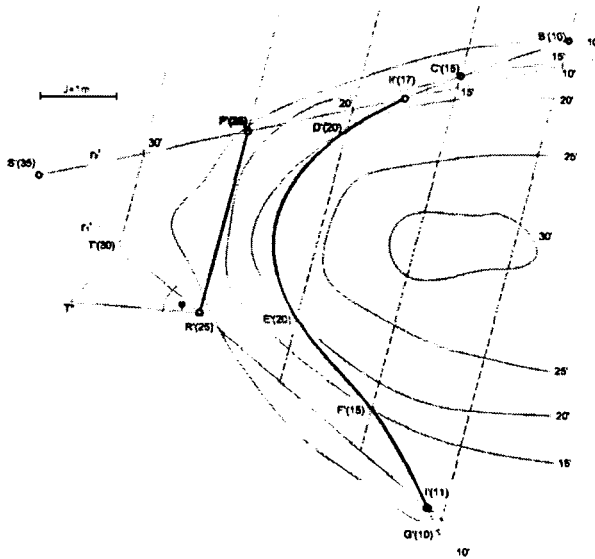
Weźmy następnie poziomy odcinek PR, plan warstwowy fragmentu terenu oraz zestopniowany wektor  $k$  dla oświetlenia równoległego (rys.2).



Rys.2. Wyznaczenie cienia rzuconego na powierzchnię topograficzną przez poziomy odcinek PR w oświetleniu równoległym

Znajdźmy cień tego odcinka na przyjętej powierzchni. W tym celu poprowadźmy dwa równoległe do  $k$  promienie świetlne  $r_1$  i  $r_2$  zestopniowane modułem wektora  $k$ . Płaszczyzna tych promieni przecina powierzchnię terenu w krzywej nieregularnej  $A - H$ , a ta z kolei promienie  $r_1$  i  $r_2$  w punktach  $I$  i  $II$ . Te ostatnie, jako punkty przebiecia powierzchni tymi promieniami, są punktami granicznymi dla krzywej cienia. Krzywa  $I'(14)II'(17)$  jest zatem jego rzutem cechowanym. Na rysunku pokazany jest także kąt  $\varphi$  nachylenia promieni świetlnych do poziomu.

Rozważmy ponownie ten sam fragment terenu i poziomy odcinek  $PR$ , tym razem jednak w oświetleniu centralnym, którego źródłem jest punkt właściwy  $S$  (rys.3).

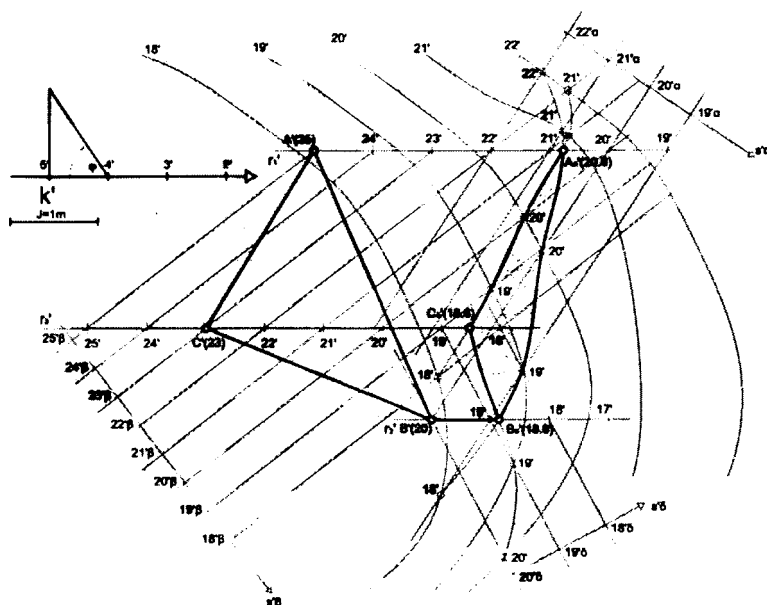


Rys.3. Wyznaczenie cienia rzuconego na powierzchnię topograficzną przez poziomy odcinek PR w oświetleniu centralnym

W tym przypadku prowadzimy przez punkt  $S$  oraz punkty  $P$  i  $R$  promienie świetlne  $r_1$  i  $r_2$ , które wyznaczają płaszczyznę przecinającą naszą powierzchnię topograficzną. Fragment  $I'(11)II'(17)$  linii przekroju jest rzutem cechowanym cienia rzuconego od odcinka  $PR$  z punktu  $S$  na tę powierzchnię. Kąt  $\varphi$  jest kątem nachylenia promieni świetlnych do poziomu.

Porównując rysunki 2 i 3 zauważmy, że zasięg krzywej cienia od odcinka  $PR$  jest większy przy oświetleniu centralnym, aniżeli przy oświetleniu równoległym.

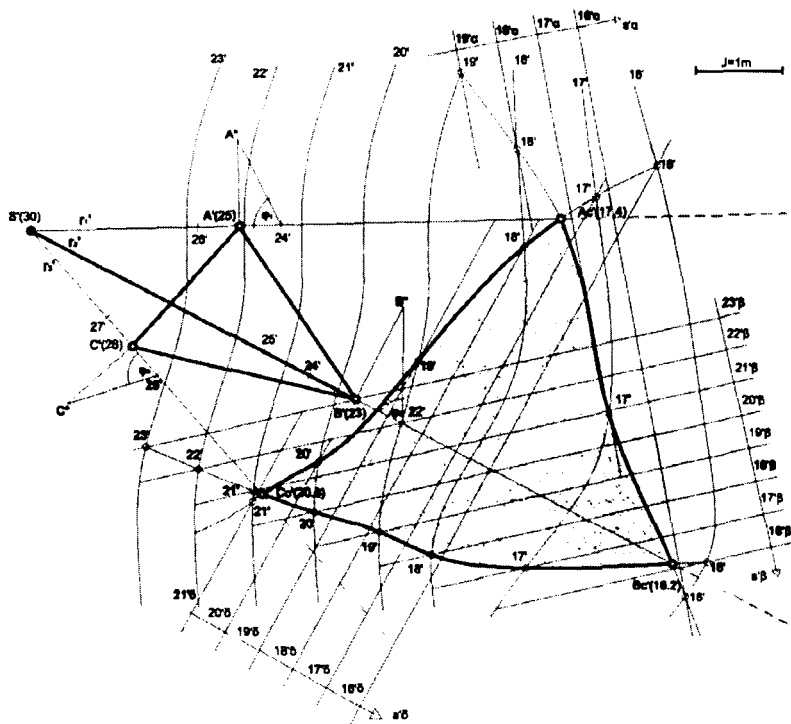
Niech teraz dany będzie trójkąt  $ABC$  w ogólnym położeniu, fragment powierzchni topograficznej oraz oświetlenie równoległe określone zestopniowanym wektorem  $k$  (rys.4).



Rys. 4. Wyznaczenie cienia rzuconego na powierzchnię topograficzną przez trójkąt  $ABC$  w oświetleniu równoległym

Przez wierzchołki trójkąta oraz przechodzące przez nie promienie świetlne prowadzimy płaszczyzny  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$ , które przecinają powierzchnię terenu w krzywych nieregularnych. Punkty, w których krzywe te przecinają się są punktami przebicia terenu przez promienie świetlne  $r_1$ ,  $r_2$  i  $r_3$ . Figura  $A_c B_c C_c$  jest figurą przestrzenną ograniczoną fragmentami tych krzywych i będącą cieniem rzuconym trójkąta  $ABC$  na przyjętą powierzchnię topograficzną.

Rozważmy teraz przypadek centralnego oświetlenia trójkąta  $ABC$  i jego cienia rzuconego na fragment powierzchni terenu (rys.5).

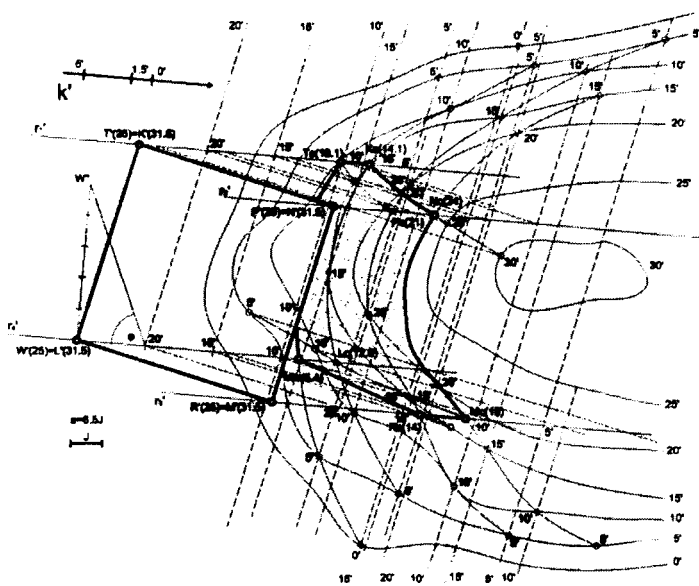


Rys. 5. Wyznaczenie cienia rzuconego na powierzchnię topograficzną przez trójkąt ABC w oświetleniu centralnym

Źródłem światła jest punkt  $S$ , który wraz z wierzchołkami trójkąta tworzy trójścian  $\{S ABC\}$ . Przez ściany tego trójścianu przechodzą płaszczyzny  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\delta$  przecinające powierzchnię w krzywych, które ograniczają jej obszar  $A_c B_c C_c$ , będący cieniem rzuconym od trójkąta  $ABC$ .

Na koniec weźmy dowolny obiekt trójwymiarowy, na przykład sześcián  $\{KLMN TWRP\}$ , fragment powierzchni topograficznej oraz zestopniowany wektor  $k$  dla oświetlenia równoległego (rys.6).





Rys. 6. Wyznaczenie cienia rzuconego na powierzchnię topograficzną przez sześcian  $\{KLMN TWRP\}$  w oświetleniu równoległym

Niech podstawy  $KLMN$  i  $TWRP$  sześcianu leżą odpowiednio na płaszczyznach warstwowych  $\pi_{25}$  i  $\pi_{31,5}$ , co oznacza, że jego krawędź  $a = 6,5$  jednostek. Przez naroża wielościanu poprowadźmy promienie świetlne, a przez nie płaszczyzny tnące i wyznaczmy punkty przebiecia powierzchni tymi promieniami. Obszar ograniczony punktami  $K_c, N_c, M_c, R_c, W_c, T_c$  oraz fragmentami krzywych przecięcia terenu płaszczyznami promieni świetlnych jest szukanym cieniem rzuconym od sześcianu  $\{KLMN TWRP\}$ .

## Wnioski

Określenie zasięgu cienia rzuconego od obiektu na powierzchnię terenu, czyli na *powierzchnię topograficzną*, niejednokrotnie posiada ogromne znaczenie w planowaniu różnych inwestycji. W projektowaniu architektoniczno-urbanistycznym podstawową kwestią jest zagadnienie nasłonecznienia terenu oraz określenie przestrzennych granic wysokości zabudowy i zadrzewienia. Ustalenie parametrów nasłonecznienia pozwala maksymalnie wykorzystać wpływ promieni słonecznych na

podniesienie warunków zdrowotnych zarówno pomieszczeń zamkniętych jak i wnętrz urbanistycznych, a więc: arterii komunikacyjnych, terenów między blokowymi, terenów sportowych, placów do gier i zabaw itp. Stale zwiększające się wymagania w zakresie nasłonecznienia wnętrz i terenów nieraz powodują duże trudności w projektowaniu obiektów kubaturowych. Graficzne przedstawienie formy cienia rzuconego w zależności od parametrów położenia słońca oraz miejsca lokalizacji obiektów architektonicznych pozwala na określenie warunków lokalizacji, gabarytów oraz formy architektonicznej jakie musi spełniać projektowany obiekt. Metodą graficzną zapisu i analizy zmian nasłonecznienia oraz zacienienia terenu i obiektów architektonicznych jest wykres tzw. *linijki słońca*. Linijka słońca przedstawia zmiany wielkości wieloboku cienia rzuconego w zależności od wielkości kąta pomiędzy kierunkiem promienia słonecznego a płaszczyzną horyzontalną (rzutnią poziomą) oraz od położenia geograficznego obiektu architektonicznego (szerokość i długość geograficzna). Wykresy te realizowane są na podkładach sytuacyjno-wysokościowych w skali 1:500. Problemy te stanowią obecnie jeden z ważniejszych elementów procesu projektowego. Konstrukcja cienia rzuconego jest zasadniczym etapem projektowania obiektów architektonicznych.

### **Literatura:**

1. Rachwał T., *Geometria wykreślna*, PWN, Warszawa 1966.
2. Slaby M.S., *Engineering Descriptive Geometry*, Barnes & Noble, Inc. New York 1960.
3. Waligórski Z., *Zasady i zastosowania rzutu cechowanego*, WNT, Warszawa 1961.

## SUMMARY

### **Cast Shadows of Geometrical Objects on a Topographic Surface in the Mapping Projection Method**

To outline an area of the cast shadow from an object on a topographic surface often becomes a decisive factor for various design works concerning a land development planning e.g. for housing construction, recreation centers, cultivation etc.

So far geometrical constructions essential for solving the cast shadows problem have been presented mainly by means of the Monge projection, central perspective or axonometric projection. In this article several cases of defining cast shadows from simple geometrical objects upon topographic surface have been solved in the *mapping projection method*, which seems to be particularly interesting for cartographers and geodetic surveyors.

Some of the cases have been shown both in parallel and central lightning.