Milda Maria Burzała

Próba oszacowania prawdopodobieństwa realizacji europejskiej opcji kupna na przykładzie indeksu WIG20

Studia i Prace Wydziału Nauk Ekonomicznych i Zarządzania 9, 440-449

2008

Artykuł został opracowany do udostępnienia w internecie przez Muzeum Historii Polski w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego. Artykuł jest umieszczony w kolekcji cyfrowej bazhum.muzhp.pl, gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach dozwolonego użytku.

MUZEUM HISTORII POLSKI

STUDIA I PRACE WYDZIAŁU NAUK EKONOMICZNYCH I ZARZĄDZANIA NR 9

MILDA MARIA BURZAŁA

PRÓBA OSZACOWANIA PRAWDOPODOBIEŃSTWA REALIZACJI EUROPEJSKIEJ OPCJI KUPNA NA PRZYKŁADZIE INDEKSU WIG20

Wstęp

Opcja kupna to jeden z najpopularniejszych instrumentów finansowych wykorzystywanych głownie przez inwestorów indywidualnych. Europejska opcja kupna w przeciwieństwie do opcji amerykańskiej daje nabywcy prawo wykonania opcji tylko w dniu jej wygaśnięcia. Nabycie opcji kupna zabezpiecza przed niekorzystnym ruchem cen i tym samym zmniejsza ryzyko finansowe. Opcje kupna stanowią podstawę budowy wielu różnorodnych strategii inwestycyjnych, stąd podstawowym problemem jest przewidywanie kształtowania się ceny instrumentu bazowego oraz jej relacje względem ceny wykonania opcji. W artykule podjęto próbę wykorzystania w tym celu prawdopodobieństwa realizacji europejskiej opcji kupna uzyskane z dwumianowego modelu wyboru dyskretnego. Im wyższe prawdopodobieństwo realizacji opcji, tym mniejsze ryzyko inwestycji. Modelowe prawdopodobieństwa oraz stawiane prognozy mogą być pomocne w podjęciu decyzji dotyczącej kształtowania dynamicznej struktury portfela (zakupu akcji, zawarcia transakcji przeciwstawnej z odpowiednim wyprzedzeniem). Takie postępowanie służy zminimalizowaniu ewentualnej straty z poczynionych inwestycji.

Analizę prawdopodobieństwa realizacji europejskiej opcji kupna podejmowali wcześniej w swoich pracach B. Stolarz, W. Tarczyński [5], [6]. Rozważania teoretyczne dotyczyły kształtowania się prawdopodobieństwa warunkowego przy założeniu, że stopa zwrotu z akcji jest ograniczona minimalną i maksymalną roczną stopą zwrotu liczoną przy zastosowaniu kapitalizacji ciągłej.

Badania empiryczne przedstawione w obecnym artykule dotyczą prawdopodobieństwa uzyskanego z modelu względem wybranych czynników kształtujących cenę opcji kupna. Zawarto tu również pewne uwagi dotyczące możliwości wykorzystania w badaniach empirycznych podejścia zaproponowanego w pracach [5], [6].

Materiał statystyczny

Pierwotnie badania miały dotyczyć opcji na akcje. Jednakże ze względu na zawieszenie obrotu wszystkimi seriami opcji na akcje w lipcu 2007 roku analiza zamieszczona w artykule dotyczy jedynie opcji na indeks WIG20. Wstępnie rozważano wszystkie serie opcji kupna na WIG20 wygasające w marcu 2008 (OW20C8xxx) z kursem wykonania od 250 do 450. Wybór podyktowany był możliwością weryfikacji prognoz postawionych na podstawie modeli. Część serii, jednak, musiała być z badań wykluczona ze względu na brak zmienności zmiennej zależnej (tzn. w całym okresie notowania indeks WIG20 poniżej lub powyżej ceny realizacji). Ze względów technicznych nie można szacować parametrów modelu z jakościową zmienną objaśnianą, gdy przyjmuje ona tylko wartość jeden lub tylko wartość zero na całym zbiorze obserwacji. Ostatecznie modele budowano dla 9 serii z kursem wykonania od 280 do 370 punktów. Kurs rozliczeniowy dla opcji wygasających w marcu 2008 roku wyniósł 287.

Ponieważ prawdopodobieństwo realizacji opcji kupna zależy od ceny opcji, wśród zmiennych objaśniających testowano znaczenie różnych czynników kształtujących właśnie cenę opcji (pogrubionym drukiem zaznaczono symbol zmiennej):

- Stopa procentowa wolna od ryzyka (euribor),
- Czas pozostający do wygaśnięcia opcji (dni),
- Zmienność instrumentu bazowego (historyczna na podstawie wykładniczej średniej ważonej (EMMA),
- Logarytmiczna stopa zwrotu z indeksu WIG20 (sz)
- Notowania opcji na rynku wtórnym (kurs),
- Zmienna 0-1 przyjmująca wartość 1 w momencie wypuszczenia nowej serii z najniższą bądź z najwyższą ceną wykonania (zj).

Długość szeregów czasowych wykorzystanych do szacowania parametrów modelu była warunkowana notowaniami opcji na rynku wtórnym. Materiał statystyczny do szacowania parametrów modelu obejmował jedynie obserwacje

do 29 lutego 2008 roku. Dane z marca do dnia realizacji opcji kupna (20 marca 2008) wykorzystano do oceny trafności prognoz postawionych na podstawie modeli.

Definicja jakościowej zmiennej objaśnianej

W początkowej fazie badań rozważano możliwość zdefiniowania zmiennej jakościowej według propozycji zawartej w pracy [5]. Autorzy artykułu na podstawie ceny rynkowej instrumentu bazowego (K_t), ceny i terminu wykonania opcji (K_w i t_w) oraz minimalnej i maksymalnej rocznej stopy zwrotu liczonej przy wykorzystaniu kapitalizacji ciągłej (r_1 i r_2) tworzą trzy obszary w których mogą znaleźć się ceny rynkowe instrumentu bazowego (rys. 1).

Ceny z obszaru „brak realizacji" rosnąc nawet z maksymalną stopą zwrotu nie mogą osiągnąć w terminie wygaśnięcia ceny wykonania. Natomiast ceny z obszaru „realizacja opcji" spadając nawet z maksymalną stopą spadku będą wyższe od ceny wykonania w terminie wygaśnięcia opcji. Pozostałe ceny z obszaru ograniczonego minimalną i maksymalną stopą znajdują się w obszarze niepewności. Ceny te w zależności od osiąganej stopy zwrotu mogą, ale nie muszą zapewnić realizacji opcji w terminie wykonania. Granice obszarów zależą w tym podejściu od przyjętej minimalnej i maksymalnej stopy zwrotu.

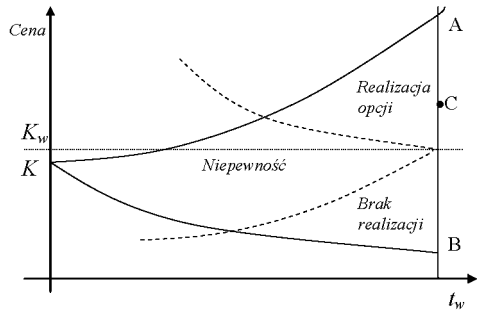
Ponieważ stopy liczone na podstawie materiału empirycznego mogą być obciążone dużym wpływem wahań przypadkowych w przeprowadzonych badaniach wykorzystano średnią logarytmiczną stopę zwrotu plus, minus trzykrotne odchylenie standardowe. Okazało się, że tak wyznaczone obszary pozwoliły określić dla opcji OW20C8280 (zrealizowanej) prawdopodobieństwo znalezienia się indeksu WIG20 w obszarze „realizacja opcji" 11,12 oraz 18, 19 i 20 marca (tzn. w terminie wygaśnięcia opcji) na poziomie odpowiednio: 0,54; 0,53; 0,6; 0,58 oraz 0,64 (ilorazy odcinków AC/AB). Natomiast dla opcji OW20C8300 (niezrealizowanej) indeks WIG20 znalazł się w obszarze „brak realizacji 4, 7, 10 marca oraz bezpośrednio przed terminem wykonania 13 - 20 marca z prawdopodobieństwem powyżej 0,85.

Klasyfikacja instrumentu bazowego w danym momencie t do jednego z trzech obszarów była przeprowadzana na podstawie aktualnego kursu. Tak zdefiniowanej zmiennej jakościowej nie można było jednak wykorzystać w modelu z tego względu, że dla okresu będącego podstawą szacowania modeli zmienna jakościowa przyjmowała tylko wartości zerowe (brak zmienności).

Bardzo ciekawa teoretycznie i atrakcyjna w badaniach empirycznych koncepcja zdefiniowania różnych obszarów cen dla instrumentu bazowego wymaga dalszych badań dotyczących sprecyzowania minimalnej i maksymalnej stopy zwrotu.

W końcowym efekcie analiza została przeprowadzona przy upraszczającym założeniu, że opcja zostanie zrealizowana w chwili t, jeśli wartość rynkowa indeksu WIG20 (K_t) będzie nie niższa niż cena wykonania opcji (K_w). Oznacza to rozważanie prawdopodobieństwa dla binarnej zmiennej objaśnianej:

$$\Upsilon_t = \begin{cases} 1, & gdy\, K_t \geq \mathrm{K_w} \\ 0, & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}.$$



Rys. 1. Możliwe obszary cen instrumentu bazowego dla europejskiej opcji kupna
Źródło: Na podstawie [5].

Prawdopodobieństwo realizacji opcji kupna

W najprostszej wersji można przyjąć, że binarna zmienna objaśniana Υ zależy liniowo od K zmiennych objaśniających:

$$\Upsilon = \mathbf{x}\,\boldsymbol{\beta} + \xi,$$

gdzie: $\mathbf{x} = [x_1 \;\; \ldots \;\; x_K \;\; 1]$ oznacza wektor wartości (K+1) nielosowych zmiennych objaśniających (czynników kształtujących cenę opcji),

$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \ldots \\ \beta_K \\ \beta_0 \end{bmatrix}$ - nieznany wektor (K+1) parametrów,

ξ - składnik losowy,

Υ - binarna zmienna losowa.

Przez $F(Y)$ oznaczono dystrybuantę standaryzowanej zmiennej losowej. Wtedy zmienną Y można zdefiniować za pomocą funkcji uwikłanej:

$F(Y) = F(\mathbf{x}\boldsymbol{\beta} + \xi)$.

Jeśli składnik losowy ξ spełnia założenia o zerowej wartości oczekiwanej i nieskorelowaniu składników losowych z kolejnych obserwacji, *prawdopodobieństwo* P_1, że wartość indeksu WIG20 będzie nie niższa niż cena wykonania opcji określone jest przez dystrybuantę rozkładu składnika losowego:

$$P_1 = F(\mathbf{x}\boldsymbol{\beta}) = \int_{-\infty}^{\mathbf{x}\boldsymbol{\beta}} f(\xi)d\xi \ ,$$

gdzie $f(\xi)$ to odpowiednia funkcja gęstości o znanych parametrach zmiennej losowej ξ. Przyjęty typ rozkładu dla zmiennej losowej ξ determinuje typ otrzymanego modelu.

W badaniach szacowano parametry dwumianowych modeli logitowych, w których prawdopodobieństwo P_1 określone jest za pomocą dystrybuanty rozkładu logistycznego $\xi \sim L(0, \pi^2/6)$:

$$P_1 = F(\mathbf{x}\boldsymbol{\beta}) = \int_{-\infty}^{\mathbf{x}\boldsymbol{\beta}} \frac{e^{-\xi}}{\left(1+e^{-\xi}\right)^2} d\xi = \frac{1}{1+e^{-\mathbf{x}\boldsymbol{\beta}}} \ .$$

Wykorzystanie modeli logitowych podyktowane zostało możliwościami ewentualnych dalszych badań. Klasa modeli logitowych stanowi, bowiem, podstawę rozbudowanych, uogólnionych modeli wartości ekstremalnych. Warto przy tym zauważyć, że wyniki uzyskane na podstawie modelu logitowego mogą być łatwo transformowane na wyniki z modelu probitowego, ponieważ $\beta_{logit} \approx 1{,}6\ \beta_{probit}$.

Wyniki oszacowań

Szacowanie modeli przeprowadzono w dwóch etapach. Pierwszy etap to modele z pojedynczą zmienną objaśniającą. Kryterium wyboru modelu była trafność oszacowań, wskaźnik dopasowania McFaddena oraz istotność zmiennej objaśniającej. W przypadku jednakowych lub podobnych wskazań podstawę wyboru modelu stanowiły kryteria informacyjne[1]. W drugim etapie podjęto próbę poprawy jakości modelu poprzez dołączanie kolejnych zmiennych objaśniających. Wyniki oszacowań dla najlepszych modeli zawarto w tabeli 1.

[1] Do szacowania parametrów modeli wykorzystano ogólnodostępny program GRETL (www.kufel.torun.pl).

Przedstawione w tabeli wyniki oszacowań parametrów modeli wskazują na istotność notowań opcji kupna na rynku wtórnym dla większości modeli. Próba dołączenia do modelu dodatkowych zmiennych tylko w przypadku dwóch serii (OW20C8300 i OW20C8310) umożliwiła poprawę trafności oszacowań.

Znaki ocen parametrów przy zmiennych w większości modeli jest zgodny z oczekiwaniami. Prawdopodobieństwo realizacji opcji kupna jest tym wyższe, im wyższy jest kurs notowania opcji na rynku wtórnym, im dłuższy jest czas pozostający do realizacji oraz im wyższa jest stopa procentowa wolna od ryzyka. Jedynie w modelach z dwoma zmiennymi nieprawidłowe znaki oszacowań otrzymano dla ocen parametrów przy zmiennej euribor oraz zmienność. W tym drugim przypadku oczekiwano, że wzrost zmienności wpływa na wzrost ceny opcji i tym samym wzrost prawdopodobieństwa realizacji opcji kupna.

Tabela 1. Parametry modeli logitowych z pojedynczą zmienną objaśniającą dla prawdopodobieństwa realizacji opcji kupna na WIG20

Opcja OW20C8	280	290	300	310	320	320	330	340	350	360	370
Liczba obserwacji (liczba jedynek)	18 (17)	34 (30)	37 (20)	59 (29)	53 (18)	53 (18)	52 (15)	64 (23)	57 (10)	62 (10)	52 (3)
Częstość empiryczna jedynek	0,94	0,88	0,54	0,49	0,34	0,34	0,29	0,36	0,18	0,16	0,06
Zmienna	kurs	kurs	kurs	kurs	kurs	czas	Euri-bor	euribor	kurs	kurs	kurs
Parametr	0,067	0,026	0,044	0,047	3,44	15,14	28,64	17,13	0,5	0,065	0,355
P-value	0,005	0,014	0,034	0,00003	0,00001	0,00001	0,003	0,00001	0,046	0,031	0,391
McFaddena pseudo R kwadrat	0,369	0,199	0,441	0,748	1	1	0,751	0,577	0,791	0,828	0,847
Trafność Ogólna (%) (trafność jedynek)	94,4 (100)	85,3 (97)	78,4 (85)	54,2 (86,2)	100 (100)	100 (100)	94,2 (86,7)	87,5 (82,6)	96,5 (90)	96,8 (90)	98,1 (100)

Źródło: Opracowanie własne

Wyjaśnienia wymagają wyniki uzyskane dla opcji kupna z kursem realizacji 320 punktów. W przypadku 2 modeli trafność oszacowań wyniosła 100%. Jest to szczególny przypadek, gdzie zachowanie zmiennych było ściśle mono-

toniczne Kurs opcji oraz czas pozostający do realizacji dla zbioru obserwacji będącego podstawą szacowania modelu był malejący w analizowanym okresie podobnie jak zachowanie indeksu WIG20. Z tego powodu model idealnie wskazuje maksymalne oszacowanie prawdopodobieństwa realizacji opcji kupna w okresach, kiedy indeks WIG20 jest wyższy od ceny wykonania oraz minimalne, gdy indeks WIG20 jest niższy od ceny wykonania opcji kupna.

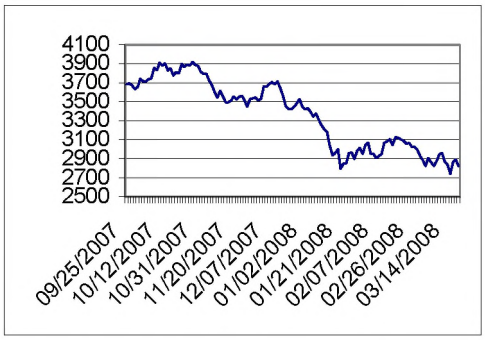
Na uwagę zasługuje model dla oceny prawdopodobieństwa realizacji opcji z kursem wykonania 370 punktów. Tylko w trzech okresach (02.11.2007; 10.12.2007; 12.12.2007) wartość indeksu WIG20 była wyższa od ceny realizacji opcji i na te trzy przypadki model bardzo dobrze zareagował wskazując prawdopodobieństwo realizacji odpowiednio 1,0; 0,86; 0,52. Klasyczny sposób klasyfikacji modelowanych stanów lub kategorii z wykorzystaniem dwumianowego modelu dla zmiennej jakościowej nakazuje przyjąć, że wystąpi pierwszy ze stanów (tu: realizacja opcji kupna), jeśli prawdopodobieństwo modelowe będzie wyższe od 0,5. W przypadku prób niezbilansowanych, tzn. takich, gdzie ilość jedynek istotnie różni się od ilości zer proponuje się, aby klasyfikację przeprowadzać z wykorzystaniem częstości empirycznych [1]. W przypadku 3 jedynek na 52 obserwacje należy przewidywać, że opcja kupna zostanie zrealizowana, gdy prawdopodobieństwo modelowe będzie większe już od 0,06. Dla omawianego przypadku wartość ta została zdecydowanie przekroczona.

Prognozy prawdopodobieństwa realizacji opcji kupna

Na podstawie uzyskanych modeli postawiono prognozy prawdopodobieństwa realizacji opcji kupna na WIG20 w kolejnych dniach giełdowych do dnia realizacji tzn. 20 marca 2008. Wszystkie modele dla serii z kursem realizacji od 300 do 370 punktów, w których zmienną objaśniającą był kurs opcji kupna lub czas pozostający do realizacji, wskazały w całym okresie prognozowania prawdopodobieństwo realizacji równe 0. Jedynie modele, gdzie zmienną objaśniającą był euribor wskazują na realizację opcji kupna ostatnich dniach notowań. W przypadku serii z kursem realizacji 330 prognozy prawdopodobieństwa na 3 ostatnie dni notowania opcji (17, 18 i 20 marca) wyniosły odpowiednio: 0,51; 0,53; 0,67). Z kolei dla serii z kursem wykonania 340 realizację opcji kupna sugerują prognozy na 4 ostatnie dni notowań (14, 17, 19, 20 marca) – prawdopodobieństwo odpowiednio równe: 0,3; 0,44; 0,49; 0,53. Przy prognozowaniu

uwzględniono niezbilansowanie próby. Modelowe prawdopodobieństwa porównywano z częstością empiryczną (podaną w tabeli 1).

Dla opcji kupna na WIG20 realizowanych w marcu 2008 roku szczególne znaczenie mają modele opisujące prawdopodobieństwo realizacji opcji kupna z najniższymi cenami wykonania, ponieważ w omawianym okresie indeks WIG20 charakteryzował się malejącym trendem, co przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2. Indeks WIG20 w okresie od 25.09.2007 – 20.03.2008
Źródło: Na podstawie danych GPW w Warszawie.

Cena rozliczeniowa dla opcji realizowanych w marcu została ustalona na poziomie 2870. Z tego względu do analizy włączono modele dla serii z kursem wykonania 290 i 280 punktów, mimo, że w przypadku obu modeli próby są mocno niezbilansowane. Wyniki dotyczące prawdopodobieństw empirycznych i modelowych dla obu modeli podano w tabeli 2.

Mimo, iż prognozy podane w tabeli nie wskazują na realizację opcji z kursem wykonania 280, to należy zauważyć, że prawdopodobieństwo realizacji opcji w porównaniu z prognozami dla innych serii znacznie wzrosło. I taki wniosek może wykorzystać inwestor rozpatrując różne strategie inwestycyjne.

Podsumowanie

Najlepsze wyniki uzyskano z dwumianowych modeli logitowych przy wykorzystaniu informacji na temat kursu opcji na rynku wtórnym.

Modele nie spełniają swojej roli w przypadku, gdy mamy do czynienia tylko z jedną możliwą sytuacją, tzn. na całym zbiorze obserwacji cena instrumentu bazowego jest poniżej lub powyżej ceny wykonania opcji. Dopracowania wymaga metoda określenia jakościowej zmiennej objaśnianej. Właściwa interpre-

tacja uzyskanych wyników wymaga kompleksowej analizy modeli dla wszystkich serii rozpatrywanej opcji z różnymi kursami wykonania.

Tabela 2. Prawdopodobieństwa empiryczne i modelowe dla opcji na WIG20

Dzień prognozy	Kurs wykonania 300		Kurs wykonania 290		Kurs wykonania 280	
	Prawd. empir.	Prawd. model.	Prawd. empir.	Prawd. model.	Prawd. empir.	Prawd. model.
03/03/2008	0	0	0	0,287	1	0,061
03/04/2008	0	0	0	0,17	1	0,007
03/05/2008	0	0,01	1	0,325	1	0,113
03/06/2008	0	0	0	0,199	1	0,018
03/07/2008	0	0	0	0,172	1	0,005
03/10/2008	0	0	0	0,253	1	0,061
03/11/2008	0	0,01	1	0,427	1	0,756
03/12/2008	0	0,01	1	0,359	1	0,744
03/13/2008	0	0	0	0,165	1	0,017
03/14/2008	0	0	0	0,136	1	0,005
03/17/2008	0	0	0	0,067	0	0,001
03/18/2008	0	0	0	0,096	1	0,005
03/19/2008	0	0	0	0,088	1	0,005
03/20/2008	0	0	0	0,052	1	0,001

Źródło: Obliczenia własne.

Dalszej pracy wymaga sposób wykorzystania informacji o czynnikach wpływających na cenę opcji kupna. W przeprowadzonych badaniach zastosowano transformację logitową funkcji liniowej. W ogólnym przypadku może to być funkcja linearyzowana.

Literatura

1. Cramer J.S., *Predictive Performance of Binary Logit Model in Unbalanced Samples*, The Statistician, Journal of the Royal Statistical Society (Series D): The Statistician 48(1).
2. Fierla A., *Opcje na akcje*, Giełda Papierów Wartościowych, Warszawa 2004.
3. Jajuga K., Jajuga T., *Inwestycje. Instrumenty finansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa*, PWN, Warszawa 2005
4. Jajuga K., *Modele z dyskretną zmienną objaśnianą,* w: St. Bartosiewicz (red. nauk.), Estymacja modeli ekonometrycznych, WE, Warszawa 1990

5. Stolorz B., Tarczyński W., *Ocena prawdopodobieństwa realizacji europejskiej opcji kupna akcji*, Rynek terminowy, nr 16/2002
6. Stolorz B., *Prawdopodobieństwo warunkowe realizacji europejskiej opcji kupna*, Inwestycje finansowe i ubezpieczenia – tendencje światowe a polski rynek, ZN AE Wrocław 1133/2006

STRESZCZENIE

W artykule podjęto próbę oszacowania prawdopodobieństwa realizacji opcji kupna na podstawie dwumianowego modelu logitowego. Okazało się, że najlepsze własności ma model, w którym zmienną objaśniającą jest kurs opcji na rynku wtórnym. Prognozy postawione na podstawie modelu może wykorzystać inwestor rozpatrując różne strategie inwestycyjne.

AN ATTEMPT OF ESTIMATING THE PROBABLITY OF EXERCISE OF EUROPEAN CALL OPTION ON THE BASIS OF WIG20 INDEX

SUMMARY

In the article was made an attempt to estimate the probability of exercise of call option on the basis of binomial logit model. It turned out, that the best properties had the model, in which the explanatory variable was the rate of option on the secondary market. The forecasts made on the basis of the model can be used by an investor, who considers various investment strategies.

Translated by M.M. Burzała

Dr Milda Maria Burzała
Akademii Ekonomicznej w Poznaniu
m.burzala@ae.poznan.pl