Grażyna Trzpiot

Implementacja metodologii regrsjii kwantylowej w estymacji var

Studia i Prace Wydziału Nauk Ekonomicznych i Zarządzania 9, 316-323

2008

Artykuł został opracowany do udostępnienia w internecie przez Muzeum Historii Polski w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego. Artykuł jest umieszczony w kolekcji cyfrowej bazhum.muzhp.pl, gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach dozwolonego użytku.

MUZEUM HISTORII POLSKI

STUDIA I PRACE WYDZIAŁU NAUK EKONOMICZNYCH I ZARZĄDZANIA NR 9

GRAŻYNA TRZPIOT

IMPLEMENTACJA METODOLOGII REGRESJI KWANTYLOWEJ W ESTYMACJI VAR[1]

Wprowadzenie

Artykuł koncentruje się na możliwości zastosowania regresji kwantylowej w rzeczywistych analizach danych. Ponieważ w danych finansowych mamy zazwyczaj wysoką asymetrię badanych rozkładów klasyczna regresja nie wyznacza dobrych estymatorów. Nie spełnione warunki modelowania MNK dają w rezultacie przeszacowania rzeczywistych wartości. Własności przyszłego rozkładu są nieznane, badacz nie może arbitralnie narzucić restrykcyjnych założeń modelu. To powoduje skierowanie celu badań na poszukiwanie modelu, który byłby odporny na złą specyfikacje modelu. Klasyczny estymator średniej oczywiście jest czuły na obserwacje oddalone od średniej i rośnie błąd średniokwadratowy estymacji.

Jedna z najważniejszych miar zagrożenia ryzyka rynkowego – VaR opisuje górną granicę strat w tym sensie, że przekraczamy ten wyznaczony poziom ze znanym, z góry ustalonym prawdopodobieństwem α. Warunkowa informacja, którą posiadamy w czasie t, wyznacza wartość VaR w momencie czasu t+h dla jednej jednostki inwestycji i jest ujemnym kwantylem rzędu α, dla $0 < \alpha < 1$, warunkowego rozkładu stopy zwrotu inwestycji

$$\mathrm{VaR}_{t+h}^{\alpha} = -Q_{\alpha}(r_{t+h}|F_t) = -\inf_{x}\{x \in R : P(r_{t+h} \le x|F_t) \ge \alpha\} \tag{1}$$

gdzie $Q_{\alpha}(\cdot)$ zapisuje kwantyl rzędu α, r_t jest stopą zwrotu portfela w momencie czasu t, F_t reprezentuje informacje dostępne w momencie czasu t.

[1] Praca zrealizowana w ramach grantu nr N111 003 32/0262

Celem implementacji jednowymiarowych miar bazujących na definicji VaR wykorzystywano estymatory wartości kwantyli odpowiednio na lewym ogonie rozkładu stopy zwrotu dla określonych ustalonych momentów w czasie. Istniejące metody, najbardziej znane podejścia, można sklasyfikować następująco: historyczna symulacja wykorzystująca rozkład empiryczny bazujący na (możliwie przefiltrowanych) przeszłych obserwacjach, metody Monte Carlo czy metoda wariancji kowariancji [7]. Następnie parametryczne modele wykorzystujące rozkłady stopy zwrotu zawierające oraz uwzględniające dynamikę zmienności oraz modele bazujące na teorii wartości ekstremalnych w rozkładzie ogona rozkładu stopy zwrotu. Kolejnym rozszerzeniem metodologii było włączenie metod statystyki wielowymiarowej (Principal Components Analysis) [8, 10] oraz wykorzystanie metod nieparametrycznych [9]. Celem artykułu jest implementacja wybranych modeli estymacji VaR bazujących na kwantylowej regresji [11] modelującej wartość ustalonego kwantyla, w miejsce całego rozkładu.

Estymacja VaR – modele z regresją kwantylową

Szacowanie wartości VaR może w sposób naturalny być powiązane się z wykorzystaniem regresji kwantylowej. Aby estymować warunkowe wartości kwantyli, szereg czasowy konkretnego kwantyla jest modelowany z wykorzystaniem wszystkich dostępnych informacji. Nie ma założeń, co do typu rozkładu stopy zwrotu. Podstawowa idea tego podejścia to modelowanie warunkowego kwantyla rzędu α:

$$Q_\alpha(r_t \mid X_t) = -\,VaR_t \tag{2}$$

jako funkcję informacji zawartych w zmienności $X_t \in F_{t-1}$, r_t jest stopą zwrotu portfela w momencie czasu t, F_t reprezentuje informacje dostępne w momencie czasu t.

$$VaR_t = -\,g_\alpha(X_t;\beta_t) \tag{3}$$

gdzie $g_\alpha(\cdot;\cdot)$, wektor parametrów β zależy od α. Dobry przykład trafnej, dobrej informacji oraz postaci analitycznej funkcjonału powinien być bliski aproksymacji kwantyla w populacji. Koenker i Basset [5] uogólnili regresję liniową poprzez przeniesienie uwagi z warunkowej średniej na warunkowe kwantyle. Jak pokazano w Koenker i Portnoy [6], kwantyl z próby można wyznaczyć jako:

$$\min_{\beta \in \mathbf{R}} \left\{ \sum_{r_t \geq \beta} \alpha \left| \mathbf{r_t} - \beta \right| + \sum_{r_t < \beta} (1-\alpha) \left| \mathbf{r_t} - \beta \right| \right\} \tag{4}$$

Rozwijając klasyczne zadanie regresji liniowej Koenker i Bassett [5] zdefiniowali estymator regresji kwantylowej rzędu α jako:

$$\hat{\beta}(\alpha) = \min_{\beta \in \mathbf{R}^k} \left\{ \sum_{r_t \geq x_t' \beta} \alpha \left| \mathbf{r_t} - \mathbf{x_t'}\beta \right| + \sum_{r_t < x_t' \beta} (1-\alpha) \left| \mathbf{r_t} - \mathbf{x_t'}\beta \right| \right\} \tag{5}$$

gdzie x_t jest nielosowym wektorem.

Zadanie minimalizacji związane z regresją kwantylową jest równoważne następującemu zadaniu programowania liniowego:

$$\min\{\alpha \mathbf{1}'\mathbf{r}^+ + (1-\alpha)\mathbf{1}'\mathbf{r}^-\} \tag{6}$$

przy ograniczeniach

$$y = \mathbf{X}b + \mathbf{r}^+ + \mathbf{r}^-$$

$$(b, \mathbf{r}^+, \mathbf{r}^-) \in R^K \times R_+^{2T}$$

gdzie $\mathbf{1}$ jest wektorem jednostkowym T wymiarowym.

Klasyczny model regresji liniowej $E(y_t| x_t) = b_0 + x_t b_1$ zastąpiony został regresją kwantylową, zmienną objaśnianą jest kwantyl rzędu α: $Q_\alpha (y_t| x_t) = b_0(\alpha) + x_t b_1(\alpha)$. Jeżeli $b(\alpha)$ nie zależy od α, model kwantylowy redukuje się do modelu warunkowej średniej ze stałą wariancją błędu dopasowania. Jeżeli $b(\alpha)$ zależy od α model specyfikuje wariancję taką, że kwantyl rozkładu y_t zależy od x_t. To podejście zawiera również heteroscedastyczne modele, w których wariancja zależy od zmiennych niezależnych. Model kwantylowy jednak odbiega od heteroscedastycznej specyfikacji.

Podstawowym założeniem modelu liniowej regresji kwantylowej przeniesionej do opisu rynku jest zależność $\mathbf{r_t} = \mathbf{x_t'}\beta_\alpha + \mu_{t,\alpha}$. Zauważmy, że rozkład błędu nie jest wyspecyfikowany. Jedynym założeniem modelu jest postać warunkowej funkcji rozkładu kwantyla zapisana następująco $\mathbf{Q}_\alpha(\mathbf{r_t}|\mathbf{x_t}) = \mathbf{x_t'}\beta_\alpha$ (czyli kwantyl stopy zwrotu portfela r_t jest liniową funkcją ekspozycji stylu) oraz $\mathbf{Q}_\alpha(\mu_{t,\alpha}|\mathbf{x_t}) = 0$.

Naturalnym rozszerzeniem funkcji celu do ogólnego możliwie też nieliniowego przypadku była propozycja zapisana w pracy Engle'a i Manganelli [2]:

$$\min_{\beta \in \mathbf{R}^k} \left\{ \sum_{r_t \geq -\mathbf{VaR}_t} \alpha \left| \mathbf{r_t} + \mathbf{VaR_t} \right| + \sum_{r_t < -\mathbf{VaR}_t} (1-\alpha) \left| \mathbf{r_t} + \mathbf{VaR_t} \right| \right\} \tag{7}$$

Zgodność i asymptotyczną normalność nieliniowej kwantylowej regresji dla szeregów czasowych przedstawiono również w powyższej pracy.

W równaniu $VaR_t = -g_\alpha(X_t;\beta_t)$ mamy związek z warunkowym odchyleniem standardowym. Model CAViaR (Conditional Autoregressive VaR) wykorzystuje wartość VaR_{t-1} jako zmienną objaśniającą x_t, aby adaptacyjnie objąć zależność od przeszłej zmienności i średniej. Funkcja r_{t-1} zawiera odniesienie do warunkowego kwantyla stopy zwrotu. W bazowym modelu, proces adaptacyjny nie uczy się na bieżącej wartości stopy zwrotu tak, jak to jest w modelu o absolutnej symetrii CAViaR

$$\mathbf{VaR_t = \beta_0 + \beta_1 VaR_{t-1} + \beta_2 |r_{t-1}|} \tag{8}$$

Taki zapis pozwala na to, aby współczynnik β_1 był różny od jedności oraz wprowadza wprost odpowiedź na wartość kwantyla w procesie stopy zwrotu, traktując w sposób symetryczny efekt wartości ekstremalnych oraz zmienność.

Implementacja regresji kwantylowej na GPW w Warszawie

Badanie przeprowadzimy dla wybranego zbioru spółek wchodzących w skład indeksu WIG-Media z GPW w Warszawie analizując dzienne stopy zwrotu za okres od 15.02.2005 do 28.05.2007. W tym okresie stopa zwrotu z indeksu rynku WIG wynosiła 0.00155 z wariancją 0.00013. W sektorze media, stopa zwrotu z indeksu WIG-Media wynosiła -0.00064 a wariancja 0.00166. Nie zakładamy rozkładu normalnego a testy statystyczne odrzuciły hipotezę o normalności rozkładu.

Część pierwszą analizy przeprowadzamy z wykorzystaniem modelu regresji warunkowego kwantyla rzędu α wynoszącego 0,01, 0,02 oraz 0,05. Wyniki estymacji w postaci parametrów modeli zapisano odpowiednio w tabelach 1-3.

Tabela 1. Parametry modeli regresji warunkowego kwantyla rzędu $\alpha = 0{,}01$.

	AGORA	INTERIA	MNI	MUZA	PWK	TVN	WSIP
średnia	-0,00027	0,00376	0,00188	0,00250	0,00201	0,00056	0,00097
wariancja	0,02239	0,03071	0,04084	0,05021	0,05773	0,03953	0,01730
$b_0(\alpha)$	0,00758	-0,04844	0,013346	-0,06072	-0,02528	0,013346	-0,05771
$b_1(\alpha)$	1,92673	0,83278	1,922789	0,98046	0,668955	1,922789	-0,39212
R^2	0,79803	0,23353	0,68888	0,44271	0,06868	0,68888	0,0817

Źródło: obliczenia własne.

Przykład zależności w badanym zbiorze, prezentujemy na rys. 1. Zależności nie są liniowe, występują dodatkowo wartości ekstremalne. Wartości nietypowe powodują, że modele mają współczynnik determinacji na poziomie średnim. Warto zauważyć, że podniesienie wartości rzędu kwantyla ma niewielki wpływ na jakość dopasowania modeli.

Tabela 2. Parametry modeli regresji warunkowego kwantyla rzędu $\alpha = 0{,}02$.

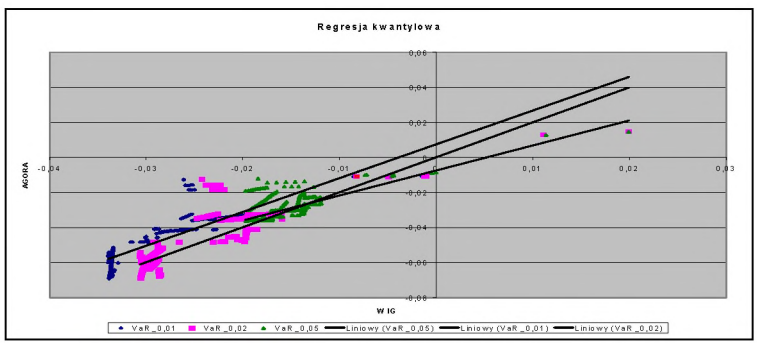
	AGORA	INTERIA	MNI	MUZA	PWK	TVN	WSIP
średnia	-0,00027	0,00376	0,00188	0,00250	0,00201	0,00056	0,00097
wariancja	0,02239	0,03071	0,04084	0,05021	0,05773	0,03953	0,01730
$b_0(\alpha)$	-0,00818	-0,0314	0,003932	-0,05489	-0,0087	0,003932	-0,04417
$b_1(\alpha)$	1,288404	1,075607	1,654554	1,138279	1,067315	1,654554	-0,17346
R^2	0,763756	0,34325	0,70231	0,466148	0,28589	0,70231	0,018875

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 3. Parametry modeli regresji warunkowego kwantyla rzędu $\alpha = 0{,}05$.

	AGORA	INTERIA	MNI	MUZA	PWK	TVN	WSIP
średnia	-0,00027	0,00376	0,00188	0,00250	0,00201	0,00056	0,00097
wariancja	0,02239	0,03071	0,04084	0,05021	0,05773	0,03953	0,01730
$b_0(\alpha)$	-0,00726	-0,02097	-0,00119	-0,05802	-0,002	-0,00119	-0,02608
$b_1(\alpha)$	1,426364	1,127363	1,592913	0,406906	1,355028	1,592913	0,171245
R^2	0,56706	0,332159	0,55016	0,037398	0,457588	0,550163	0,008299

Źródło: obliczenia własne.



Rys. 1. Regresja kwantylowa dla spółki AGORA
Źródło: badania własne

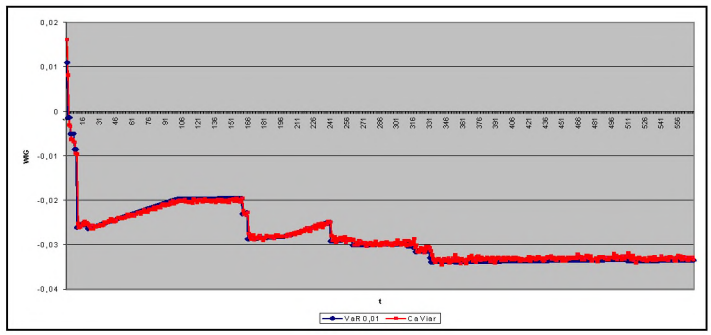
Druga część badań to model CAViaR (Conditional Autoregressive VaR) w odniesieniu do indeksu rynku WIG w tym samym okresie jak poprzednio dla poziomu ufności α wynoszącego 0,01, 0,02 oraz 0,05.

Tabela 4. Parametry modelu CAViaR dla WIG ($\alpha = 0{,}01$).

$R^2 = 0{,}974689$	Wartość estymatora	Błąd standardowy
b_0	-0,001804	0,000187
b_1	0,930714	0,00638
b_2	-0,029943	0,005262

Źródło: obliczenia własne

Model CAViaR wykorzystując autoregresję rzędu pierwszego miary kwantylowej zachowuje znacznie lepsze dopasowanie pomimo braku liniowości oraz nieznajomości rozkładu. Tak jak w poprzednim modelu podniesienie wartości rzędu kwantyla ma niewielki wpływ na jakość dopasowania modeli.



Rys. 2. Regresja kwantylowa w modelu CAViaR dla WIG ($\alpha = 0{,}01$).
Źródło: badania własne

Tabela 5. Parametry modelu CAViaR dla WIG ($\alpha = 0{,}02$)

$R^2 = 0{,}975378$	Wartość estymatora	Błąd standardowy
b_0	-0,001354	0,000157
b_1	0,936098	0,006325
b_2	-0,029193	0,004958

Źródło: obliczenia własne

Tabela 6. Parametry modelu CAViaR dla WIG ($\alpha = 0{,}05$)

$R^2 = 0{,}943636$	Wartość estymatora	Błąd standardowy
b_0	-0,001895	0,000150
b_1	0,873589	0,009021
b_2	-0,021248	0,004111

Źródło: obliczenia własne

Podsumowanie

Celem artykułu była jest implementacja modeli estymacji VaR bazujących na kwantylowej regresji [11]. Wybrano dwa podejścia do modelowania VaR jedno mające odniesienie do modelu Sharpa, drugie do modeli klasycznej autoregresji. Nowe wersje tych podejść omijaja założenie normalności badanych rozkładów. Modelują wartość kwantyla ustalonego rzędu w miejsce całego rozkładu. Prezentowane modele mogą być punktem wyjścia do szacowania miar kwantylowych mających własności lepsze niż VaR i coraz powszechniej stosowane [1, 5, 6, 12].

Literatura

1. Artzner, P., F. Delbaen, J.-M. Eber, D. Heath., *Coherent Measures of Risk*. Mathematical Finance, 9, 1999, 203–228.
2. Engle, R. F. S. Manganelli, *CAViaR: Conditional Autoregressive Value at Risk by Regression Quantiles*. Journal of Business and Economic Statistics, 22, 2004, 367–381.
3. Koenker, R., G. Bassett., *Regression Quantiles*. Econometrica 46, 1978, 33–50.
4. Koenker, R. S. Portnoy. *Quantile Regression*. Working Paper 97-0100, University of Illinois at Urbana-Champaign 1997.
5. Koenker, R., Zhao Q., *Conditional Quantile Estimation and Inference for ARCH Models*. Econometric Theory, 12, 1996, 793–813.
6. Taylor, J. W., *A Quantile Regression Approach to Estimating the Distribution of Multiperiod Returns*. Journal of Derivatives, 7, 1999, 64–78.
7. Trzpiot G., Ganczarek A., *Risk on Polish Energy Market*, in: Dynamic Econometric Models ed. Z. Zieliński, Nicolaus Copernicus University, Vol. 6, 2004, 127 –136.
8. Trzpiot G., Jaguś F., *Koncepcja PCVaR w analizie ryzyka inwestycji portfelowej na GPW w Warszawie*, W: Modelowanie preferencji a ryzyko'05, Prace Naukowe AE Katowice, Katowice 2006, 239 – 250.
9. Trzpiot G., *O nieparametrycznych metodach estymacji VaR i ETL*, W: Modelowanie preferencji a ryzyko'05, Prace Naukowe AE Katowice, Katowice 2006, 229 – 238.
10. Trzpiot G., Ganczarek A., *Value at Risk Using the Principal Components Analysis on the Polish Power Exchange*, in: M. Spiliopoulou, R. Kruse, Ch. Bogelt, A. Nurnberger, W. Gaul (eds.): From Data and Information Analysis to Knowledge

Engineering, Proc. 29th Annual GFKL Conference, University of Magdeburg, March 9-11 2005. Springer-Verlag, Heidelberg-Berlin 2006, 550 –557.

11. Trzpiot G., *Regresja kwantylowa a estymacja VaR*, Prace Naukowe AE Wrocław, 1176, Wrocław 2007, 465- 471.
12. Trzpiot G., *Decomposition of Risk and Quantile Risk Measures*, w: Dynamiczne Modele Ekonometryczne, 35 – 42, Prace Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu, Toruń 2007.

STRESZCZENIE

Artykuł koncentruje się na możliwości zastosowania regresji kwantylowej w rzeczywistych analizach danych. Ponieważ w danych finansowych mamy zazwyczaj wysoką asymetrię badanych rozkładów klasyczna regresja nie wyznacza dobrych estymatorów. Nie spełnione warunki modelowania MNK dają w rezultacie przeszacowania rzeczywistych wartości w populacji. Celem artykułu jest implementacja wybranych modeli estymacji VaR bazujących na kwantylowej regresji [13] modelującej wartość ustalonego kwantyla, w miejsce całego rozkładu.

IMPLEMENTATION METHOD OF QUANTILE REGRESSION AS A METHOD OF ESTIMATION VAR

SUMMARY

In this paper we try to consider a possibility to apply a quantile regression in real data analysis. In financial data we usually observe a high asymmetry of the probability distribution and classical regression don't give a good estimators. We don't keep assumption of the classical regression and we receive over estimation of the real value. The main aim of this work is the implementation some of the models of estimations VaR based on quantile regression.

Translated by G. Trzpiot

Dr hab. Prof. AE Grażyna Trzpiot
Akademia Ekonomiczna w Katowicach
trzpiot@ae.katowice.pl