Helena Gaspars-Wieloch

Kilka uwag o sposobie generowania struktury portfeli efektywnych

Studia i Prace Wydziału Nauk Ekonomicznych i Zarządzania 10, 423-433

2008

Artykuł został opracowany do udostępnienia w internecie przez Muzeum Historii Polski w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego. Artykuł jest umieszczony w kolekcji cyfrowej bazhum.muzhp.pl, gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach dozwolonego użytku.

MUZEUM HISTORII POLSKI

STUDIA I PRACE WYDZIAŁU NAUK EKONOMICZNYCH I ZARZĄDZANIA NR 10

HELENA GASPARS-WIELOCH

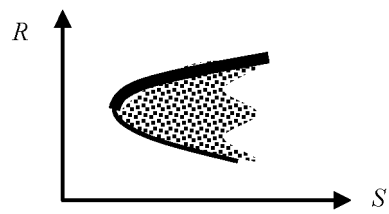
KILKA UWAG O SPOSOBIE GENEROWANIA STRUKTURY PORTFELI EFEKTYWNYCH

Wprowadzenie

W analizie portfelowej według teorii Markowitza [6], [7] strukturę efektywnych portfeli papierów wartościowych ustala się na podstawie optymalnego rozwiązania zadań maksymalizujących stopę zwrotu przy danym poziomie ryzyka lub minimalizujących ryzyko przy danej wielkości stopy zwrotu. W niniejszej pracy wskazane zostaną przypadki, w których takie postępowanie nie prowadzi do wygenerowania portfela efektywnego. W ostatniej części autorka wprowadzi odpowiednią modyfikację do pierwotnej postaci modeli optymalizacyjnych, dzięki której uzyskiwane rozwiązania wskazują zawsze strukturę portfeli efektywnych. Okazuje się, że poza wymienioną cechą, skorygowane modele mają jeszcze dwie inne cenne zalety.

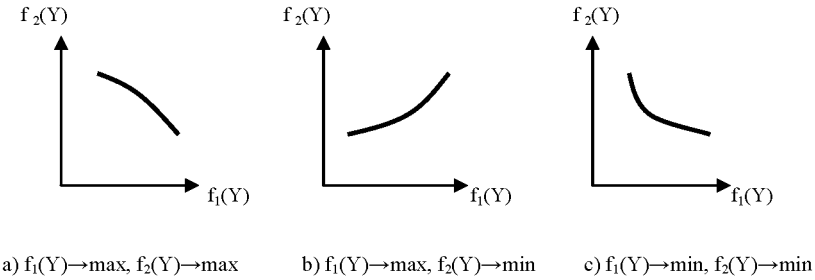
Portfel efektywny i granica efektywna

Rozpatrzmy strategie inwestycyjne polegające na zakupie papierów wartościowych. Każdy zestaw takich walorów nazywać będziemy portfelem papierów wartościowych.



Rys. 1. Zbiór możliwych portfeli
Źródło: [3].

Na rys. 1 przedstawiono zbiór punktów, których współrzędne są równe odchyleniu standardowemu stóp zwrotu (*S*) i oczekiwanej stopie zwrotu (*R*), wyznaczonym dla różnych możliwych portfeli[1]. Tylko górna część łuku tego zbioru, zwana granicą efektywną (ang. *Efficient frontier*), wskazuje strategie Pareto-optymalne (niezdominowane), czyli takie, które dla danego poziomu ryzyka mają najwyższą stopę zwrotu, lub takie, które dla danego poziomu stopy zwrotu mają najniższe ryzyko[2].



Rys. 2. Postać krzywej z rozwiązania efektywnymi
Źródło: Opracowanie własne

Nachylenie granicy efektywnej jest dodatnie, ponieważ minimalizowane jest tylko ryzyko związane z inwestycją. Na rysunku 2 pokazano postać krzywej obrazującej rozwiązania efektywne dowolnego problemu decyzyjnego dla pozostałych kombinacji kierunków optymalizacji dwóch kryteriów.

Punkty granicy efektywnej można wygenerować rozwiązując zadania (1)-(3) lub (4)-(6) dla różnych poziomów wyrazu wolnego (por. [6], [7], [11]).

I. Decydent minimalizuje ryzyko towarzyszące strategii inwestycyjnej, mierzone np. odchyleniem standardowym (*S*), przy czym zainteresowany jest stopą zwrotu równą R^d:

$$S(Y) \rightarrow \min \tag{1}$$

$$R(Y) = R^d \tag{2}$$

$$Y \in D \tag{3}$$

[1] Zgodnie z klasycznym podejściem Markowitza jako miarę ryzyka przyjmuje się właśnie odchylenie standardowe stóp zwrotu lub wariancję stóp zwrotu [6], [7], [9], [10].

[2] Zob. www.knmf.agh.edu.pl/Docs/Teoria%20portfela%20-%20J.Dzieza.pdf lub http://free.polbox.pl/m/motte/kcpx.htm

II. Decydent dąży do realizacji jak najwyższej stopy zwrotu, godząc się na ryzyko równe S^d:

$$R(Y) \to \max \tag{4}$$

$$S(Y) = S^d \tag{5}$$

$$Y \in D \tag{6}$$

gdzie:

$Y=[y_1, y_2, ..., y_m]^T$ – wektor dopuszczalnych udziałów m walorów w portfelu.

Wektor Y jest dopuszczalny, gdy suma udziałów walorów wchodzących w skład portfela jest równa jeden. Jeżeli zastosowanie krótkiej sprzedaży jest niedozwolone, to dodatkowo należy przyjąć, iż udziały są nieujemne [2], [4]. Ponadto inwestor może nałożyć jeszcze inne restrykcje dotyczące udziałów poszczególnych papierów wartościowych.

Granica efektywna a dyskretny problem decyzyjny

Jeżeli zamierzamy rozwiązać problem, w którym zmienne $y_1, y_2, ..., y_m$ mogą przyjmować wartości z pewnego skończonego zbioru, to istnieje duże prawdopodobieństwo, że dla wielu różnych poziomów R^d lub S^d zadania (1)-(3) lub (4)-(6) będą sprzeczne.

Dlatego też w niektórych opracowaniach można znaleźć modele optymalizacyjne, w których warunek jest przedstawiony w postaci nierówności[3]:

I. Decydent minimalizuje ryzyko towarzyszące strategii inwestycyjnej, mierzone np. odchyleniem standardowym (S), przy czym zainteresowany jest stopą zwrotu równą *przynajmniej* R^d:

$$S(Y) \to \min \tag{7}$$

$$R(Y) \geq R^d \tag{8}$$

$$Y \in D \tag{9}$$

II. Decydent dąży do realizacji jak najwyższej stopy zwrotu, godząc się na ryzyko *nie wyższe niż* S^d:

$$R(Y) \to \max \tag{10}$$

$$S(Y) \leq S^d \tag{11}$$

$$Y \in D \tag{12}$$

Modele (7)-(9) oraz (10)-(12) można potraktować jako jednokryterialne zadania pomocnicze dwukryterialnego problemu wyjściowego, w których to

[3] Por. [12].

jedno kryterium zostało wybrane jako cel główny, a drugie – jako cel drugorzędny (poboczny)[4].

Zastanówmy się, czy rzeczywiście każde optymalne rozwiązanie zadań (7)-(9) oraz (10)-(12) wchodzi w skład granicy efektywnej zbioru możliwych portfeli.

Rozważmy następującą sytuację. Inwestor stara się ustalić udziały akcji wchodzących w skład portfela trzyskładnikowego. Oczekiwane miesięczne stopy zwrotu akcji spółek A, B, C wynoszą odpowiednio 7%, -5% i 10%. Wariancje stóp zwrotu są równe $4(\%)^2$, $6(\%)^2$ i $5(\%)^2$, a kowariancje stóp zwrotu dla poszczególnych par papierów wartościowych wynoszą $0(\%)^2$, $3(\%)^2$ i $4(\%)^2$. Inwestor zamierza przeznaczyć dokładnie 50% swojego kapitału na zakup trzeciego waloru. Pozostałe 50% należy zainwestować w akcje spółki A i B, przy czym, ze względu na ujemną oczekiwaną stopę zwrotu, akcje spółki B mogą podlegać krótkiej sprzedaży (maksymalnie 50% wartości kapitału początkowego). Udziały akcji spółek A i B mogą zmieniać się co 10%. Inwestorowi zależy na minimalizacji ryzyka mierzonego wariancją i na oczekiwanej stopie zwrotu równej co najmniej 6,1%.

Przeanalizujmy portfel o udziałach 30%, 20% i 50% i obliczmy jego oczekiwaną stopę zwrotu $E(r_p)$ oraz wariancję v_p na podstawie poniższych wzorów:

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^{m} E(r_i)x_i, \tag{13}$$

$$v_p = \sum_{i=1}^{m} v_i x_i^2 + 2\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{i=k+1}^{m} \mathrm{cov}(r_k, r_i) x_k x_i, \tag{14}$$

gdzie:

m – liczba walorów w portfelu,

$E(r_i)$ – oczekiwana stopa zwrotu i-tego papieru wartościowego,

x_i – udział i-tego waloru w portfelu,

v_i – wariancja związana z i-tym papierem wartościowym,

$cov(r_k, r_i)$ – kowariancja pomiędzy stopami zwrotu akcji k-tej oraz i-tej spółki.

Oczekiwana stopa zwrotu wynosi 6,1%, zatem jest to portfel dopuszczalny, gdyż spełnia ograniczenie zadania. Ryzyko portfela mierzone wariancją jest równe 3,55 $(\%)^2$. Skoro nie istnieje portfel o jeszcze niższym ryzyku nawet

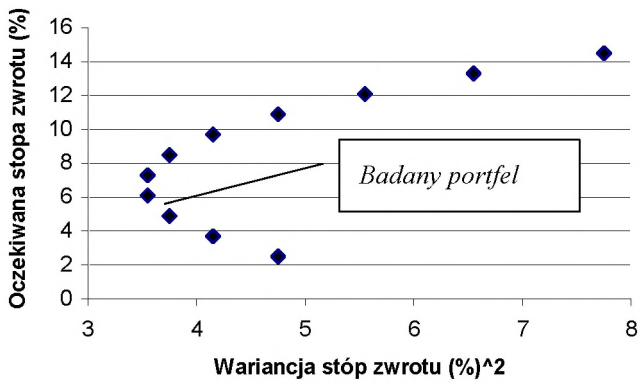
[4] Możliwość ustalenia pewnego podzbioru pełnego zbioru rozwiązań niezdominowanych, poprzez rozwiązywanie zadania dla różnych wartości progowych kryterium drugorzędnego, jest charakterystyczna nie tylko dla analizy portfelowej, lecz dla każdego innego zagadnienia wielocelowego (por. [13, s.129]).

wtedy, gdyby pominięty został warunek dotyczący wymaganej minimalnej stopy zwrotu, to możemy być pewni, iż otrzymany plan jest optymalnym rozwiązaniem zadania (7)-(9). W rozpatrywanym przykładzie minimalizowana jest wariancja stóp zwrotu, a nie odchylenie standardowe. Wiadomo jednak, że odchylenie standardowe jest pierwiastkiem wariancji, zatem minimalizując wariancję, zmniejszamy jednocześnie wartość odchylenia standardowego.

Oceńmy efektywność analizowanego portfela. Rys. 3 przedstawia wszystkie możliwe portfele, jakie można było wygenerować przy założeniu, że nie obowiązuje warunek związany z oczekiwaną stopą zwrotu. Dodatkowo zaznaczono badany portfel.

Wykres pokazuje wyraźnie, że badany portfel nie leży na granicy efektywnej. Istnieje bowiem portfel o tym samym, najniższym ryzyku, którego oczekiwana stopa zwrotu wynosi aż 7,3%. Udziały akcji spółek w tym portfelu są równe 40%, 10% i 50%.

Skoro optymalne rozwiązanie zadań pomocniczych (7)-(9) i (10)-(12) może być nieefektywne dla wyjściowego zadania dwukryterialnego, to spróbujmy ustalić przyczyny, dla których tak się dzieje.



Rys. 3. Zbiór możliwych portfeli dla rozpatrywanego przykładu
Źródło: Opracowanie własne

Po pierwsze, sytuacja ta może mieć miejsce, gdy rozpatrywany problem ma charakter dyskretny. W zaprezentowanym przykładzie skończony był zbiór dopuszczalnych wartości udziałów poszczególnych akcji w portfelu. Z dyskret-

nym zagadnieniem mamy również do czynienia wtedy, gdy zmienną decyzyjną jest liczba walorów w portfelu[5].

Po drugie, takie zjawisko można zaobserwować wówczas, gdy wartości progowe parametrów R^d lub S^d są ustalane na odpowiednio zbyt niskim lub zbyt wysokim poziomie.

Po trzecie, ryzyko wygenerowania portfela nieefektywnego pojawia się tylko wtedy, gdy w zbiorze portfeli dopuszczalnych znajdują się dwa portfele o minimalnej wartości wariancji i różnych stopach zwrotu bądź dwa portfele o maksymalnej oczekiwanej stopie zwrotu i różnych wariancjach.

Modyfikacja modeli optymalizacyjnych w zagadnieniach dyskretnych

Aby optymalne rozwiązania zadań (7)-(9) i (10)-(12) wskazywały jednocześnie udziały portfeli efektywnych, wystarczy jedynie dokonać drobnych modyfikacji w modelach optymalizacyjnych:

I. Decydent minimalizuje ryzyko towarzyszące strategii inwestycyjnej, mierzone np. odchyleniem standardowym (S), oraz maksymalizuje wielokrotność wymaganej minimalnej oczekiwanej stopy zwrotu R^d:

$$S(Y) - p \to \min \tag{15}$$

$$R(Y) = pR^d \tag{16}$$

$$p \geq 1 \tag{17}$$

$$Y \in D \tag{18}$$

II. Decydent dąży do realizacji jak najwyższej stopy zwrotu i do minimalizacji części maksymalnego dopuszczalnego ryzyka S^d:

$$R(Y) - d \to \max \tag{19}$$

$$S(Y) = dS^d \tag{20}$$

$$0 \leq d \leq 1 \tag{21}$$

$$Y \in D \tag{22}$$

gdzie:

p – wielokrotność wymaganej minimalnej oczekiwanej stopy zwrotu,

d – część maksymalnego dopuszczalnego ryzyka mierzonego odchyleniem.

Przy okazji warto dodać, że modele (15)-(18) oraz (19)-(22) przypominają częściowo tzw. zadanie programowania celów (ang. *Goal Programming*)[6], w

[5] Por. [8].
[6] Zob. [1] i [5].

którym to do poszczególnych warunków wprowadza się zmienne dystansowe, będące również elementem funkcji celu. W naszym przypadku wystarczyłoby przykładowo zastąpić wzory (15)-(16) zależnościami (23)-(24):

$$S(Y) - o \to \min \tag{23}$$

$$R(Y) - o = R^d \tag{24}$$

gdzie:

o – nieujemna zmienna dystansowa mierząca odchylenie *in plus*.

Zmienna *o* odpowiada wyrażeniu (25):

$$(p-1)R^d. \tag{25}$$

Analiza i ocena zaproponowanych modeli.

Rozwiązując problem analizowany we wstępie pracy, na podstawie zadania (26)-(32) otrzymujemy następujące udziały: 40%, 10%, 50%.

$$\sqrt{4x_A^2 + 6x_B^2 + 5x_C^2 + 6x_A x_C + 8x_B x_C} - p \to \min \tag{26}$$

$$7x_A - 5x_B + 10x_C = 6.1p \tag{27}$$

$$p \geq 1 \tag{28}$$

$$x_A + x_B + x_C = 1 \tag{29}$$

$$x_A \in \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\} \tag{30}$$

$$x_B \in \{-0.5, -0.4, -0.3, -0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\} \tag{31}$$

$$x_C = 0.5 \tag{32}$$

Wartość parametru *p* wynosi 1,1967 i oznacza, że oczekiwana stopa zwrotu wygenerowanego portfela jest o prawie 20% wyższa od wymaganej. Z analizy przeprowadzonej wcześniej wiadomo, że portfel o właśnie takiej strukturze jest efektywny.

Na podstawie powyższego przykładu należy stwierdzić, że dzięki rozwiązaniom zadań (15)-(18) i (19)-(22) można określić, o ile procent warto podnieść bądź obniżyć daną wartość progową, aby rozwiązania zadań (7)-(9) i (10)-(12) były lepsze. Tę informację można odczytać dzięki zmiennym *p* i *d*.

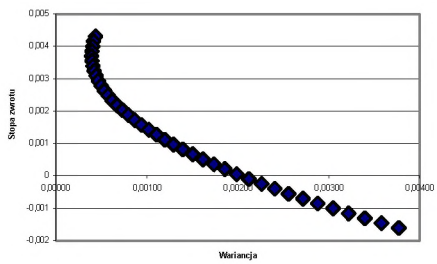
Na koniec rozpatrzmy jeszcze jedną sytuację. Jest 28 lipca 2008 roku. Inwestor zamierza stworzyć portfel złożony z akcji spółek KRUK i PKNORLEN. Wartość portfela ma wynosić dokładnie 10000 zł, a tego dnia notowania są następujące: 14 i 36 zł. Inwestor wyznaczył oczekiwaną dzienną stopę zwrotu (-0.0036623; 0.004328) i wariancję (0.004; 0,000437) poszczególnych walorów na podstawie wszystkich notowań lipcowych (20 sesji). Portfeli o wartości

10000 zł jest tylko 40 (zakładamy, że krótka sprzedaż jest niedopuszczalna), gdyż w pozostałych portfelach liczba akcji przynajmniej jednej spółki jest niecałkowita (rys. 4).

W przypadku tego problemu strukturę portfela efektywnego można wygenerować korzystając nawet z modeli (7)-(9) lub (10)-(12), gdyż w zbiorze przedstawionym na rys. 4 nie ma:

- dwóch lub więcej portfeli o najmniejszej wartości wariancji i różnych stopach zwrotu,
- dwóch lub więcej portfeli o największej oczekiwanej stopie zwrotu i różnych wariancjach.

Zastosowanie zmodyfikowanych modeli optymalizacyjnych ma jednak nadal sens. Załóżmy, że inwestor nie dysponuje informacją o stopie zwrotu i wariancji wspomnianych 40 portfeli.



Rys. 4. Zbiór możliwych portfeli o całkowitej liczbie walorów spółek KRUK i PKNORLEN
Źródło: Opracowanie własne

Zainteresowany jest maksymalizacją oczekiwanej stopy zwrotu, przy czym wariancja portfela nie powinna przekroczyć $0.00039(\%)^2$ (S^d=0.019748%). Rozwiązując odpowiednie zadanie na podstawie modelu (10)-(12) dochodzimy do wniosku, że tak postawiony problem jest sprzeczny. Korzystając natomiast z modelu (19)-(22) z wyłączeniem warunku (21) możemy uzyskać jednocześnie następujące informacje:

- parametr d wynosi 1.005500313,
- parametr d jest wyższy od jedności, a więc problem jest sprzeczny,

- aby zadanie miało rozwiązanie, maksymalna wartość odchylenia standardowego powinna być większa od podanej o przynajmniej 0.55% (S^d= 0.019857%),
- przy wariancji równej 0.0003943(%)^2 (S^d= 0.019857%) udziały akcji w portfelu wynoszą odpowiednio 0.1036 (74 akcje spółki KRUK) i 0.8964 (249 akcji spółki PKNORLEN),
- oczekiwana stopa zwrotu portfela o powyższej strukturze jest równa 0.0037.

Przykład ten pokazuje, że w przypadku zadania sprzecznego, modele (7)-(9) i (10)-(12) dają decydentowi tylko informację o tym, że problem nie posiada rozwiązania. Z kolei modele (15)-(18) i (19)-(22) bez ograniczeń (17) i (21) umożliwiają w takiej sytuacji:

- ustalenie minimalnego wzrostu bądź spadku wyrazu wolnego, koniecznego dla sformułowania zadania posiadającego rozwiązania dopuszczalne,
- wyznaczenie struktury portfela o odpowiednio zmienionych parametrach,
- wygenerowanie struktury portfela efektywnego.

Konkluzje praktyczne

W pracy zaproponowano dwa modele optymalizacyjne. Dzięki nim inwestor może generować strukturę portfela efektywnego nawet w przypadku sformułowania problemu dyskretnego.

Zaprezentowane zadania mają jeszcze dwie inne zalety. Korzystając z tych modeli inwestor otrzymuje bowiem informację o tym, o ile wartości progowe (S^d lub R^d) powinny być obniżone bądź podwyższone, aby:

- uzyskane rozwiązania były lepsze (tj. aby portfel był efektywny),
- postawiony problem nie był sprzeczny.

Literatura

1. Charnes A., Cooper W., *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming*, J. Wiley, New York, 1961.
2. Gaspars H., *Ocena efektywności strategii inwestowania dopuszczających krótką sprzedaż w okresie spadku i wzrostu indeksu giełdowego*, [w]: Tarczyński W.

[red.], Rynek kapitałowy. Skuteczne inwestowanie, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2004.
3. Haugen R.A., *Modern investment theory*, WIG PRESS, Warsaw 1996.
4. Jurek W., *Konstrukcja i analiza portfela papierów wartościowych o zmiennym dochodzie*, Wydawnictwo AE, Poznań 2001.
5. Lee S.M., *Goal Programming for Decision Analysis*, AUERBACH Publ. INC., Philadelphia 1972.
6. Markowitz H.M., *Portfolio Selection*, Journal of Finance, 1952, 7, s.77-91.
7. Markowitz H.M., *Portfolio Selection – efficient diversification of investments*, Yale University Press, New Haven 1959.
8. Ogrodnik K., *Dyskretny model wyboru portfela papierów wartościowych*, w: Metody i zastosowania badań operacyjnych, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej w Katowicach, red. Donata Kopańska-Bródka, Wydawnictwo AE w Katowicach, 2008 (w druku).
9. Ogryczak W., *Modele programowania liniowego w optymalizacji portfela inwestycji*, w: Modelowanie Preferencji a Ryzyko'03, T.Trzaskalik (red.), Wydawnictwo AE w Katowicach, Katowice 2003, 435-455.
10. Ogryczak W., Ruszczyński A., *From Stochastic Dominance to Mean-Risk Models: Semideviations as Risk Measures*. European Journal of Operational Research, 116/1999, 33–50.
11. Otto R., *Mechanizmy i metody analizy portfelowej*, Nasz Rynek Kapitałowy, 12/2000.
12. Sikora W., *Analiza portfelowa*, w: Ekonometria i badania operacyjne. Uzupełnienia z badań operacyjnych, B. Guzik (red.), MD 51, AE w Poznaniu, Poznań 1999.
13. Trzaskalik T., *Wielokryterialne dyskretne programowanie dynamiczne*. Teoria i zastosowanie w praktyce gospodarczej, Wydawnictwo AE, Katowice 1990.

STRESZCZENIE

Celem artykułu jest analiza przypadków, w których optymalne rozwiązania zadań maksymalizujących stopę zwrotu przy danym poziomie ryzyka lub minimalizujących ryzyko przy danym poziomie stopy zwrotu, nie wskazują udziałów portfeli efektywnych. To zjawisko jest charakterystyczne dla dyskretnych zagadnień rozpatrywanych w analizie portfelowej. Autorka proponuje pewną modyfikację warunków i funkcji celu

wyjściowych modeli optymalizacyjnych, dzięki której wygenerowane portfele optymalne są jednocześnie portfelami efektywnymi.

ON THE WAY OF EFFICIENT PORTFOLIOS' GENERATING.

SUMMARY

The goal of this article is to discuss cases when optimal solutions of models maximizing the rate of return at a given level of risk and models minimizing the risk at a given level of rate of return do not enable to generate efficient portfolios. This phenomenon appears when discrete portfolio problems are considered. The author shows how to modify constraints and the objective function in the models mentioned in order to guarantee the efficiency of each optimal solution.

Translated by H. Gaspars-Wieloch

Mgr Helena Gaspars-Wieloch
Akademia Ekonomiczna w Poznaniu
helena.gaspars@ae.poznan.pl