Mariusz Stopa

Teoria kategorii i niektóre jej logiczne aspekty

Zagadnienia Filozoficzne w Nauce nr 64, 7-58

2018

Teoria kategorii i niektóre jej logiczne aspekty

Mariusz Stopa
Uniwersytet Jagielloński, Instytut Filozofii;
Kolegium Filozoficzno-Teologiczne Dominikanów

Category theory and some of its logical aspects

Abstract

This article is intended for philosophers as a short partial introduction to category theory (CT) and its peculiar connection with logic. First, we consider CT itself. We give a brief insight into its history, introduce some basic definitions and present examples. In the second part, we focus on categorical topos semantics for propositional logic. We give some properties of logic in toposes, which, in general, is an intuitionistic logic. We next present two families of toposes whose tautologies are identical with those of classical propositional logic. The relatively extensive bibliography is given in order to support further studies.

Keywords

category theory, topos theory, categorical logic, propositional logic, intuitionistic logic, non-classical logic.

Zagadnienia Filozoficzne w Nauce, nr 64 (2018), ss. 7–58

1. Wstęp

Teoria kategorii (dalej także TK), choć jest stosunkowo młodą teorią matematyczną, posiada już dzisiaj ważną pozycję we współczesnej matematyce, a jej zastosowania obecne są m.in. w teoretycznej informatyce oraz fizyce matematycznej[1]. Stanowi ona doniosły „język" opisujący struktury matematyczne i ich systemy, z którym związany jest cały zasób pojęć i metod o poziomie abstrakcji i ogólności, jakiego nie obserwowano dotąd w matematyce (por. Marquis, 2009, s. 2). Ponadto teoria kategorii łącząc na głębokim poziomie algebrę, geometrię i logikę ujawnia swoją ogromną moc unifikującą. Jej znaczenie dla filozofii, choć dopiero powoli odkrywane, ujawnia się przede wszystkim poprzez wspomniany bogaty, wewnętrzny związek z logiką, czy przez jej znaczenie dla filozofii matematyki i fizyki, np. w kontekście, odpowiednio, podstaw matematyki i strukturalizmu. Temat związków teorii kategorii z filozofią wymagałby co najmniej osobnej publikacji.

Niniejsza praca napisana jest z myślą o filozofach, choć skorzystać z niej mogą także inni Czytelnicy zainteresowani teorią kategorii lub logiką. Ma ona stanowić elementarne wprowadzenie do teorii kategorii (choć nawet to brzmi na wyrost w stosunku do bogactwa tej teorii) oraz zasygnalizować możliwe znaczenie tej teorii dla filozofii, szczególnie poprzez analizę jej związków z logiką zdań. Pod koniec pracy, w sekcji 8, omawiamy także kilka przykładów innych zastosowań TK w filozofii. Jednym z celów niniejszej pracy jest także podanie bibliografii do dalszych studiów.

---

[1] Niniejszy artykuł jest zmienioną i rozszerzoną wersją nieopublikowanej pracy dyplomowej o tym samym tytule, napisanej przez autora pod kierunkiem ks. prof. Michała Hellera w ramach studiów filozoficznych w Kolegium Filozoficzno-Teologicznym Polskiej Prowincji Dominikanów w 2017 roku.

Jako ogólne wprowadzenia do teorii kategorii warte polecenia są m.in. (Lawvere i Schanuel, 1997; Smith, 2016; Simmons, 2011; Goldblatt, 2006; Awodey, 2010; Leinster, 2014)[2]. Dobrym wprowadzeniem do tematu TK, wraz z bardzo bogatą literaturą, jest także hasło „Category Theory" w *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (zob. Marquis, 2015). Z polskich podręczników do TK, o ile nam wiadomo, dostępne są jedynie książka Z. Semadeniego i A. Wiwegera (1972) oraz skrypt M. Zawadowskiego (2012). Spośród innych prac w języku polskim dotyczących teorii kategorii wskażmy najpierw, wprowadzający do tematu związków TK z logiką i filozofią, artykuł M. Hellera (Heller, 2016b), gdzie znajduje się także cenny przewodnik po niektórych pozycjach dostępnej literatury wraz z krótkim komentarzem. Natomiast w pracy (Bondecka-Krzykowska i Murawski, 2008) autorzy skupiają się na innych aspektach TK, mianowicie na jej znaczeniu w ramach strukturalizmu (w filozofii matematyki) oraz dla podstaw matematyki. Omówienie niektórych pojęć TK podaje także B. Skowron (2015), a Z. Król (2006) porusza m.in., kluczowy dla niniejszej pracy, temat związków TK z logiką (choć nie jest to główny wątek tej książki). Powyższa lista nie wyczerpuje bynajmniej polskich publikacji dotyczących TK i jej związków z logiką czy filozofią, mimo wszystko jednak literatura polskojęzyczna w tym ważnym temacie jest bardzo uboga. Brakuje m.in. przystępnych wprowadzeń do TK i jej związków z logiką, które z jednej strony omawiałyby dane zagadnienia dość ściśle, wraz z komentarzem i przykładami, a z drugiej strony byłyby bardziej przystępne, np. dla filozofów, niż opracowania ściśle matematyczne. Zaradzenie tej potrzebie było naszą podstawową motywacją przy pisaniu niniejszej pracy.

[2] W niniejszej pracy w wielu miejscach opieraliśmy się szczególnie na podręczniku R. Goldblatta (2006).

Ze względu na bardzo szeroki zakres teorii kategorii nie jest możliwe, w granicach niniejszej pracy, przedstawienie dokładnego wprowadzenia do tej teorii, które zawierałoby choćby większość podstawowych pojęć wraz z odpowiednim komentarzem. Natomiast ze względu na wzajemną zależność tych pojęć nie jest także możliwe przedstawienie bardziej zaawansowanych pojęć bez omówienia bardziej podstawowych. Ostatecznie zdecydowaliśmy, aby w niniejszej pracy najpierw omówić dokładniej jedynie niektóre podstawowe pojęcia, nawet kosztem pominięcia innych fundamentalnych pojęć (np. takich jak funktor, transformacja naturalna czy funktory sprzężone, o których jedynie wspominamy w niektórych miejscach, szczególnie w sekcji 3), a następnie przejść do omówienia logiki zdań w toposach, do czego także potrzebować będziemy nowych pojęć.

W sekcji 2 przedstawiamy wyrywkową historię rozwoju teorii kategorii wraz z niektórymi jej zastosowaniami. Kolejna część wprowadza niektóre z podstawowych pojęć teorii kategorii wraz z komentarzami i przykładami. Sekcja 4 przedstawia kategoryjne podejście do teoriomnogościowego mówienia o elementach zbioru. W kolejnej sekcji wprowadzamy nowe pojęcia stosowane standardowo w teorii kategorii, które będą nam potrzebne w dalszej części pracy. Następnie przechodzimy do przedstawienia znaczenia teorii kategorii. Dokładniej rozważamy, i to bardzo pobieżnie, tylko jeden przykład, będący jednak bezpośrednim zastosowaniem teorii kategorii w jednej z dziedzin filozofii, mianowicie semantykę toposów w ramach logiki zdań. Ze względu na fundamentalne znaczenie logiki dla filozoficznych rozumowań, związki teorii kategorii z logiką mogą mieć o wiele szersze filozoficzne zastosowanie. W sekcji 6 wprowadzamy potrzebne pojęcia oraz pokazujemy w jaki sposób toposy mogą stanowić semantykę dla logiki zdań. W kolejnej sekcji omawiamy różne własności logiki toposów. Na koniec, w ostatniej części, wspominamy krótko o innych zastosowaniach TK w filozofii. Po krótkim zakończeniu następują dwa bardziej techniczne dodatki oraz literatura.

2. Zarys rozwoju teorii kategorii i jej sukcesów

W niniejszej sekcji jedynie sygnalizujemy niektóre ważne wydarzenia i prace dotyczące rozwoju teorii kategorii. Za początek tej teorii może uchodzić praca Samuela Eilenberga[3] i Saundersa Mac Lane'a z 1945 roku (Eilenberg i Mac Lane, 1945). Co ciekawe, jak piszą sami autorzy (zob. Eilenberg i Mac Lane, 1945, s. 247), idea kategorii pojawia się w niej jako pojęcie pomocnicze dla bardziej podstawowych pojęć tzw. funktora i naturalnej transformacji[4]. Kategorie pełnią wtedy rolę dziedziny i przeciwdziedziny funktorów. Antycypacje teorii funktorów i naturalnych transformacji, ograniczonych jednak tylko do grup, pojawiają się już w ich wcześniejszej pracy (Eilenberg i Mac Lane, 1942).

---

[3] Z osobą Samuela Eilenberga wiąże się polski wątek dotyczący teorii kategorii, gdyż był on polskim Żydem urodzonym w Warszawie w 1913 r. Tam też na Uniwersytecie Warszawskim uzyskał doktorat z matematyki. Był ważnym przedstawicielem warszawskiej szkoły matematycznej. Później był także członkiem bourbakistów. Znany był jako Sammy lub S^2P^2: „Smart Sammy the Polish Prodigy" (zob. przedmowa D. Eisenbuda, doktoranta Mac Lane'a w jego książce *Saunders Mac Lane: A Mathematical Autobiography*).

[4] Choć są to fundamentalne pojęcia teorii kategorii, w niniejszym szkicowym opracowaniu nie podajemy ich ścisłej definicji. Omówienie tych pojęć Czytelnik znajdzie w każdym pełniejszym wprowadzeniu do teorii kategorii. Na potrzeby tej sekcji Czytelnik może myśleć o funktorze jako o pewnym abstrakcyjnym morfizmie (który z kolei jest pewnym abstrakcyjnym uogólnieniem funkcji) idącym z jednej kategorii do drugiej. Naturalna transformacja jest odpowiednim morfizmem działającym na poziomie funktorów, a więc idącym z jednego funktora do drugiego. Na krótko wrócimy do tych pojęć w sekcji 3.

Jako prehistorię teorii kategorii można przyjąć rozwój abstrakcyjnej algebry, teorii krat i algebry uniwersalnej. Mac Lane sugeruje, że są one, podobnie jak powstała niewiele wcześniej notacja funkcji za pomocą strzałki $f : X \to Y$, koniecznymi prekursorami TK (zob. Mac Lane, 1988, s. 333). Teorię kategorii można także postrzegać jako konceptualne rozszerzenie programu Kleina w geometrii (zob. Marquis, 2009, s. 3, gdzie autor pisze ponadto, iż jest to podstawowa teza całej tej książki). Już Eilenberg i Mac Lane w swojej pionierskiej pracy wspominają program erlangeński Kleina i dodają, że „przestrzeń geometryczna z jej grupą transformacji jest uogólniana do kategorii z jej algebrą odwzorowań” (Eilenberg i Mac Lane, 1945, s. 237, tłum. moje).

Pisząc ten założycielski artykuł Eilenberg i Mac Lane nie myśleli o powstającej właśnie teorii kategorii jako o nowej dziedzinie, która z czasem zacznie się samodzielnie rozwijać, lecz traktowali ją jedynie jako cenny język, czy nowy sposób patrzenia na struktury matematyczne. Przełomowym wydarzeniem, które znacząco przyczyniło się do dostrzeżenia ogromnego potencjału TK, było odkrycie przez Daniela Kana w jego pracy (Kan, 1958) pojęcia funktorów sprzężonych (*adjoint functors*)[5]. Jest to wyjątkowo ważne pojęcie, o którym Mac Lane napisał, że przedstawia ono poważny konceptualny postęp (a które zostało przeoczone zarówno przez bourbakistów, Eilenberga, jak i jego samego) oraz że przyczyniło się ono do usamodzielnienia się TK jako przedmiotu badań (por. Mac Lane, 1988, s. 341 i 360). Funktory sprzężone powiązały koncepcyjnie jednym pojęciem wiele różnych, nieraz odległych, konstrukcji matematycznych lub logicznych. Za pomocą funktorów sprzężonych można kategoryjnie opisać

[5] Przystępne omówienie funktorów sprzężonych zawiera (Marquis, 2015), dokładniej omawiają je np. (Smith, 2016; Simmons, 2011).

m.in. kwantyfikatory. Analiza kwantyfikatorów jako funktorów sprzężonych jest według S. Awodeya jednym z najbardziej znaczących odkryć we współczesnej logice (zob. Awodey, 1996, s. 235).

Nieco wcześniej swoją przygodę z TK rozpoczął wielki francuski matematyk Alexander Grothendieck, laureat Medalu Fieldsa, jeden z czołowych twórców geometrii algebraicznej. Szczególne znaczenie miała jego praca (Grothendieck, 1957). Zdefiniowane przez niego tzw. toposy Grothendiecka, będące pewnym uogólnieniem pojęcia przestrzeni, odegrały i nadal odgrywają ogromną rolę. Grothendieck uważał teorię toposów za swego rodzaju uogólnienie samej topologii. Francis William Lawvere i Myles Tierney dokonali następnie pewnego uproszczenia aksjomatów Grothendiecka dotyczących toposów. W ten sposób powstały tzw. elementarne toposy, zwane dalej po prostu toposami (zawierają one w sobie toposy Grothendiecka), które m.in. pełnią niezwykle ważną funkcję w związkach teorii kategorii z logiką (zob. sekcje 6 i 7). O początkach teorii toposów McLarty m.in. tak pisze: „teoria toposów powstała z pracy Grothendiecka w zakresie geometrii, topologicznych zainteresowań Tierneya i ciekawości Lawvere'a w zakresie podstaw fizyki" (zob. McLarty, 1990, s. 352, tłum. moje). Widać tutaj pewien ślad tego, jak szerokim i ważnym pojęciem jest topos. Wspomnijmy tylko, że poza niezwykle ważną rolą toposów w ramach teorii kategorii, w związkach z logiką oraz w standardowej matematyce, mają one także znaczenie w fizyce[6].

[6] W zastosowaniach do fizyki, teoria toposów wykorzystywana jest m.in. w ramach prac nad podstawami fizyki (zob. np. Döring i Isham, 2011), w mechanice kwantowej (zob. np. Abramsky i Coecke, 2008), a nawet w ramach prac nad kwantową grawitacją (zob. np. Isham i Butterfield, 1999). Szereg innych odnośników do zastosowań TK w fizyce zainteresowany Czytelnik znajdzie w przypisie 26. pracy (Heller, 2015). Na polskim gruncie TK stosują do fizyki m.in. M. Heller i J. Król (zob. np. ich ostatnie wspólne prace 2017a,b,c).

Ważną pracą dla rozwoju teorii kategorii był także doktorat F.W. Lawvere'a z 1963 r. pt. „Functorial Semantics of Algebraic Theories" napisany pod kierunkiem Eilenberga, w którym autor m.in. zaproponował kategorię kategorii (*the category of categories*), a także rozwinął swoją elementarną (tj. wyrażoną w języku logiki pierwszego rzędu) teorię kategorii zbiorów (ETCS – *Elementary Theory of the Category of Sets*), którą rok później dopracował i opublikował w formie artykułu (rozszerzoną wersją tamtego artykułu jest praca (Lawvere, 2005), natomiast cała teoria jest szerzej rozwinięta w podręczniku (Lawvere i Rosebrugh, 2003) będącym wprowadzeniem do matematyki w oparciu o kategoryjne podejście do zbiorów). O tym artykule Mac Lane napisał, że „ustalił on zaskakujący fakt, iż jest możliwe sformułowanie formalnej podstawy matematyki innej niż standardowe podstawy, które dają aksjomatyczna teoria mnogości i teoria typów" (zob. Mac Lane, 1988, s. 342, tłum. moje). W ETCS zupełnie nieobecne jest pierwotne pojęcie „bycia elementem" (zbioru), któremu w standardowej teorii mnogości na poziomie języka odpowiada symbol predykatywny „$\in$", dlatego teoria ta nazywana jest czasem teorią „zbiorów bez elementów"[7]. W tym kontekście Mac Lane pisze (zob. Mac Lane, 1988, s. 342), że okazało się możliwe zastąpienie pierwotnego pojęcia „bycia elementem" (zbioru) przez pierwotne pojęcie „składania funkcji" (pomiędzy zbiorami), choć nie jest to bezpośrednie zastąpienie jednego pojęcia drugim, lecz przejście do zupełnie innego myślenia o zbiorach. Ten nowy sposób myślenia sam Lawvere opisał jako myślenie o istocie matematyki w kategoriach formy (kiedy to wiodącym pojęciem jest izomorficznie inwariantna

[7] W sekcji 4 pokazujemy, jak w TK możemy mówić o pewnych elementach zbiorów (dokładniej obiektów) jedynie za pomocą morfizmów.

struktura[8]), w przeciwieństwie do substancji (której odpowiadałoby rozumienie zbiorów poprzez ich elementy[9]). Podobna zmiana myślenia widoczna była już wcześniej w niektórych dziedzinach matematyki, dopiero teraz jednak została dopuszczona także do samych jej podstaw.

Wyjątkowo ważnym i ciekawym zastosowaniem teorii kategorii jest stworzenie nowych podstaw geometrii różniczkowej. Dokładniej rzecz biorąc, geometria nie tylko zyskała nowe podstawy, ale otrzymała zupełnie nowe oblicze. Jest to tzw. syntetyczna geometria różniczkowa (*synthetic differential geometry*), w której podstawową rolę odgrywają tzw. gładkie toposy (*smooth toposes*) (zob. np. Kock, 2006; Bell, 2008; Moerdijk i Reyes, 1991). Jest to osobny, szeroki, szczególnie ważny dla fizyki temat, gdyż wszystkie podstawowe równania fizyki matematycznej są równaniami różniczkowymi. Rozwój syntetycznej geometrii różniczkowej jest szczególnie ważny dla ogólnej teorii względności, w której geometria różniczkowa odgrywa fundamentalną rolę. Ponieważ jednak teorii toposów używa się obecnie także do opisu mechaniki kwantowej, zatem sukces poszukiwań nowej kwantowej teorii grawitacji może być uzależniony m.in. od rozwoju matematyki właśnie w obszarze teorii kategorii.

---

[8] Związane jest to z tym, że pojęcia TK definiowane są (jedynie) z dokładnością do jedynego izomorfizmu, a nie jednoznacznie. Niektóre takie pojęcia omawiamy w dalszej części tekstu (np. obiekt końcowy na s. 24, czy produkt na s. 31).

[9] Dokładnie rzecz biorąc Lawvere pisze, że substancja [pisana małą literą] matematyki tkwi w Formie, a nie w Substancji (rozumianych jak powyżej, pisanych wielką literą) (zob. Lawvere, 2005, s. 7). Ciekawe, że już Cantor i Zermelo poróżnili się w swoim podejściu do teorii zbiorów właśnie w tej kwestii. Cantor reprezentował izomorficzno-inwariantne podejście do zbiorów, podczas gdy Zermelo krytykował takie podejście Cantora i idąc za Fregem uważał, że teoria mnogości musi być ufundowana na pojęciu „należenia do" (zob. wstęp McLarty'ego w Lawvere, 2005, s. 2).

3. Niektóre podstawowe pojęcia i przykłady

Spróbujmy teraz nieco dokładniej przyjrzeć się teorii kategorii i jej specyfice. Zaczniemy od definicji samej kategorii. Każda kategoria to pewna kolekcja „rzeczy” zwanych obiektami oraz pewna kolekcja „rzeczy” zwanych strzałkami lub morfizmami. Każda taka strzałka ma przypisane dwa obiekty (może to być ten sam obiekt dwukrotnie): dziedzinę (początek) i przeciwdziedzinę (koniec, nazywany także kodziedziną). Strzałki te muszą spełniać pewne bardzo podstawowe i naturalne prawa. Warto pamiętać jednak, że obiekty wcale nie muszą być zbiorami, czy przestrzeniami jakiegokolwiek rodzaju, a strzałki nie muszą być funkcjami (czy to dowolnymi pomiędzy zbiorami, czy zachowującymi odpowiednią strukturę przestrzeni). Są to dowolne (abstrakcyjne) „rzeczy”, które spełniają odpowiednie aksjomaty. Zacznijmy więc od formalnej definicji kategorii.

Definicja 1. *Kategoria* $\mathcal{C}$ składa się z rodziny obiektów $\mathsf{Ob}(\mathcal{C})$ (które będziemy oznaczać $A, B, C, \ldots$) i rodziny morfizmów (strzałek) $\mathsf{Arr}(\mathcal{C})$ (które będziemy oznaczać $f, g, h, \ldots$), takich że:

- każdy morfizm f ma jednoznacznie wyznaczoną dziedzinę $\mathsf{dom}(f)$ i kodziedzinę $\mathsf{cod}(f)$, które są obiektami; piszemy $f : A \to B$ lub $A \xrightarrow{f} B$, jeśli $A = \mathsf{dom}(f)$, $B = \mathsf{cod}(f)$;
- dla dowolnych morfizmów $f : A \to B$ i $g : B \to C$ istnieje jednoznacznie określone złożenie $g \circ f : A \to C$. Składanie jest łączne:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f,$$

gdzie dziedziny i kodziedziny są następujące:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

- dla każdego obiektu B istnieje morfizm identycznościowy $\mathsf{1}_B : B \to B$ (oznaczany także id_B), który jest jedynką dla składania:
$$\mathsf{1}_B \circ f = f \qquad \text{i} \qquad g \circ \mathsf{1}_B = g,$$
jeśli $f : A \to B$, a $g : B \to C$.

Będziemy używać także sformułowań $\mathcal{C}$-obiekt, $\mathcal{C}$-strzałka, na elementy, odpowiednio, $\mathsf{Ob}(\mathcal{C})$ i $\mathsf{Arr}(\mathcal{C})$ (choć nieraz, szczególnie gdy będzie jasne o jaką kategorię chodzi, będziemy również pomijać przedrostek „$\mathcal{C}$-"). Rodzinę wszystkich strzałek idących z A do B będziemy oznaczać poprzez $\mathcal{C}(A, B)$ lub $\mathsf{Arr}_{\mathcal{C}}(A, B)$ (jeśli będzie oczywiste o jaką kategorię chodzi, to piszemy także $\mathsf{Arr}(A, B)$).

Warto podkreślić, że rodzinę obiektów wprowadza się jedynie dla bardziej intuicyjnego opisu kategorii, jest ona jednak formalnie całkowicie eliminowalna. Piszą o tym wprost Eilenberg i Mac Lane w swojej pionierskiej pracy tuż po podaniu definicji kategorii: „jest zatem jasne, że obiekty mają drugorzędne znaczenie i mogą być zupełnie pominięte w definicji kategorii" (zob. Eilenberg i Mac Lane, 1945, s. 238, tłum. moje). Szerzej rozważa tę kwestię i omawia jej filozoficzne znaczenie M. Heller w (Heller, 2016a), podając definicję kategorii odnoszącą się jedynie do strzałek, a będącą równoważną do powyższej (zob. także Semadeni i Wiweger, 1972, s. 39n). Kluczową rolę strzałek widać również po tym, że w definicji kategorii, strzałki muszą spełniać odpowiednie warunki, a o obiektach nic nie zakładamy.

Powyżej podana definicja kategorii jest bardzo abstrakcyjna i ogólna. Przejawia się to w tym, że bardzo wiele różnych, powszechnie spotykanych struktur matematycznych ma postać kategorii. Z braku miejsca przyjrzymy się tylko niektórym przykładom.

Rozważmy na początek kategorie składające się z tylko jednego obiektu i pewnej ilości strzałek. Zauważmy, że dowolna półgrupa (monoid) $(G, \cdot)$ jest właśnie taką kategorią, gdzie elementy tej półgrupy $a, b, c, \ldots \in G$ są strzałkami (morfizmami). Strzałką identycznościową jest element neutralny, a składaniem strzałek jest działanie grupowe:

$$a \circ b = a \cdot b\,.$$

Wszystkim warunkom definicyjnym kategorii zadość czynią aksjomaty półgrupy (działanie jest łączne, a element neutralny spełnia warunki dla składania identyczności). Widzimy, że struktura strzałek w dowolnej kategorii z jednym obiektem odpowiada dokładnie strukturze półgrupy (monoidowi).

Aby w języku kategorii zdefiniować grupę, zdefiniujmy pewien szczególny typ morfizmu.

Definicja 2. *Morfizmem odwrotnym* do $f : A \to B$ nazywamy morfizm $f^{-1} : B \to A$, taki że

$$f^{-1} \circ f = \mathbb{1}_A \qquad \text{i} \qquad f \circ f^{-1} = \mathbb{1}_B\,.$$

Morfizm posiadający odwrotny nazywany jest *izomorfizmem*[10]. Jak łatwo pokazać, odwrotny morfizm, jeśli istnieje, jest wyznaczony jednoznacznie. Ponadto $(f^{-1})^{-1} = f$, możemy więc mówić o f i f^{-1} jako o wzajemnie odwrotnych izomorfizmach. Jeśli istnieją takie morfizmy f i f^{-1} jak w powyższej definicji, to obiekty A i B nazywamy

[10] Czytelnik mający pewne doświadczenie z różnymi strukturami matematycznymi w ramach standardowej matematyki, zetknął się już zapewne z pojęciem izomorfizmu, jako bijekcji zachowującej pewną strukturę (np. izomorfizm pomiędzy grupami czy izomorfizm liniowy pomiędzy przestrzeniami wektorowymi). Powyższa definicja izomorfizmu uogólnia standardowe jego pojmowanie sprowadzając się do tego znaczenia w ramach standardowych struktur matematycznych, jednocześnie rozszerzając jego stosowanie do dowolnej kategorii.

izomorficznymi, co oznaczamy $A \cong B$. Podkreślmy, że izomorficzność dwóch obiektów zależy od struktury strzałek pomiędzy nimi, a więc jest zależna od danej kategorii. Poprzestańmy na ogólnym komentarzu, że izomorficzne obiekty można uważać za w pewnym sensie równoważne lub posiadające tę samą strukturę[11]. Dysponując pojęciem izomorfizmu możemy zdefiniować grupę jako kategorię z jednym obiektem, w której wszystkie strzałki są izomorfizmami. Natomiast naturalne uogólnienie do dowolnej kategorii[12], w której wszystkie strzałki są izomorfizmami, prowadzi dokładnie do pojęcia grupoidu.

Przejdźmy do kategorii z większą ilością obiektów. Najprostsze tego typu kategorie będą posiadały jedynie strzałki identycznościowe (są to tzw. *kategorie dyskretne*). Dowolny zbiór może być postrzegany jako taka właśnie kategoria. Jego elementy są obiektami tej kategorii, a brakowi jakiejkolwiek struktury zbioru odpowiada istnienie jedynie trywialnych strzałek identycznościowych. Jeśli rozważymy kategorie z co najwyżej jedną strzałką idącą od dowolnego obiektu do (w ogólności) innego dowolnego obiektu otrzymamy dokładnie kategorie, które odpowiadają quasi-porządkom. Jeśli $(P, \preccurlyeq)$ jest dowolnym quasi-porządkiem, to obiektami kategorii są elementy zbioru P, a pomiędzy $a, b \in P$ jest strzałka wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi $a \preccurlyeq b$. Można łatwo pokazać, że częściowym porządkom odpowiadają dokładnie tzw. *kategorie szkieletowe* (*skeletal*) (są to kategorie, które na mocy definicji posiadają tę własność, że izomorficzność do-

[11] Można pokazać, że izomorficzność obiektów pociąga bijekcję pomiędzy rodzinami strzałek z jednego i drugiego obiektu, jak i bijekcję pomiędzy rodzinami strzałek do jednego i drugiego obiektu (zob. Smith, 2016, s. 30, tw. 14).

[12] Dokładnie rzecz biorąc należy ograniczyć się do tzw. małych kategorii zdefiniowanych poniżej.

wolnych obiektów oznacza ich tożsamość (identyczność)) z maksymalnie jedną strzałką idącą od dowolnego obiektu do innego (w ogólności) obiektu.

Kategorie rozważane powyżej są przykładami tzw. małych kategorii. Kategorię nazywamy *małą*, jeśli zarówno rodzina obiektów, jak i rodzina strzałek mogą być jedno-jednoznacznie odwzorowane w elementy jakichś zbiorów[13]. Kategorię, która nie jest mała, nazywamy *dużą*. Wśród dużych kategorii wyróżniamy także tzw. kategorie *lokalnie małe*. Są to takie kategorie, dla których żądamy jedynie, aby dla dowolnych dwóch obiektów A i B rodzina strzałek $\mathsf{Arr}(A, B)$ mogła być jedno-jednoznacznie odwzorowana w elementy jakiegoś zbioru. Jest wiele ważnych kategorii, które choć nie są małe, są jednak lokalnie małe.

Bardzo ważną rodzinę lokalnie małych kategorii stanowią kategorie, których obiekty są zbiorami z pewną strukturą, jak np. zbiory częściowo uporządkowane, grupy, czy przestrzenie topologiczne, a morfizmami są odpowiednie odwzorowania zachowujące daną strukturę. Najuboższą strukturą jest zwykły zbiór niemający tak naprawdę żadnej struktury. Kategoria Set składa się z obiektów, którymi są zbiory i morfizmów, którymi są standardowe funkcje. Kategoria Poset składa się z obiektów, którymi są zbiory częściowo uporządkowane (ang. *poset – partially ordered set*) i morfizmów, którymi są odwzorowania zachowujące porządek, a więc funkcje monotoniczne. W kategorii Group mamy grupy i homomorfizmy grupowe, a w kategorii Top przestrzenie topologiczne i odwzorowania ciągłe. To oczy-

[13] Często przyjmuje się w rozważanej definicji, że rodzina obiektów i rodzina strzałek są po prostu (zwykłymi) zbiorami (w przeciwieństwie do klas właściwych). Jeśli jednak jako teorię zbiorów przyjęlibyśmy ZFC, to elementami dowolnego zbioru mogą być jedynie inne zbiory. Wtedy strzałki musiałyby być zbiorami, czego nie chcemy zakładać.

wiście tylko niektóre przykłady, istnieją także kategorie zbiorów skończonych, macierzy, przestrzeni wektorowych, rozmaitości i wiele innych.

Z jednych kategorii możemy także tworzyć inne kategorie. Podstawowymi operacjami są m.in.: wzięcie odpowiedniej mniejszej podkategorii danej kategorii, iloczyn dwóch kategorii, utworzenie kategorii strzałek, której obiektami są strzałki pierwotnej kategorii (a strzałkami są odpowiednie pary strzałek pierwotnej kategorii). Wszystkie te konstrukcje, ze względu na brak miejsca oraz brak większego powiązania z dalszą treścią artykułu, omawiamy w dodatku I.

Jak mogliśmy się już nieco przekonać, jedną z podstawowych idei teorii kategorii jest badanie pewnych obiektów poprzez morfizmy łączące obiekty z innymi obiektami. Idąc dalej za tą ideą, aby dowiedzieć się nieco więcej o samych kategoriach należałoby spróbować zbadać odpowiednie strzałki pomiędzy samymi kategoriami traktowanymi jako obiekty jakiejś większej kategorii[14]. Takimi strzałkami pomiędzy kategoriami są tzw. funktory. Są one tak zdefiniowane, że łączą odpowiednio obiekty i struktury strzałek jednej kategorii z obiektami i strukturą strzałek drugiej kategorii. Może to się dokonywać na różny sposób. Rozważmy tylko jeden przykład. Tzw. funktor zapominania (*forgetful functor*) idący z kategorii Group do kategorii Set, który każdej grupie (będącej obiektem Group) przypo-

[14] W związku z kategorią, której obiektami są inne kategorie, należy oczywiście uważać, by nie popaść w problem analogiczny do paradoksu Russella dotyczącego zbioru wszystkich zbiorów. Nie wchodząc głębiej w to zagadnienie zauważmy, że jeśli na przykład ograniczymy się do kategorii małych, to kategoria, której obiektami będą wszystkie małe kategorie, a strzałkami funktory pomiędzy tymi kategoriami, będzie poprawnie określona.

rządkowuje zbiór jej elementów, a homomorfizmowi funkcję, którą on sam jest. Funktor ten zapomina więc o strukturze grup i „zaczyna" je postrzegać (w docelowej kategorii) jak zwykłe zbiory[15].

Można pójść jeszcze o jeden poziom wyżej. Skoro funktory, jako morfizmy pomiędzy kategoriami, a więc pomiędzy pewnymi strukturami, są tak ważne i ciekawe, to możemy znowu zastosować podstawową ideę teorii kategorii i przejść do badania funktorów poprzez odpowiednie strzałki łączące różne funktory, takie jak transformacje naturalne (*natural transformations*). Funktory jako obiekty i transformacje naturalne pomiędzy nimi jako strzałki tworzą bardzo ważne w teorii kategorii tzw. kategorie funktorowe. Przypomnijmy, że w swoim założycielskim artykule (Eilenberg i Mac Lane, 1945) Eilenberg i Mac Lane piszą, że transformacje naturalne i funktory są bardziej podstawowe od samych kategorii. Niestety w niniejszej pracy nie będziemy się jednak zajmowali, skądinąd niezwykle ważnymi dla TK, kategoriami funktorowymi.

To wstępne i bardzo pobieżne wprowadzenie w świat kategorii jest jednak, mamy nadzieję, wystarczające, aby dostrzec choć ślad powszechności kategorii oraz ich siły unifikującej wiele pojęć i struktur matematycznych.

[15] Bez wprowadzania pojęcia funktora sprzężonego, zanotujmy jedynie bardzo ciekawy fakt, że w TK w bardzo elegancki sposób można otrzymać tzw. wolne (*free*) struktury, mianowicie poprzez (lewy) funktor sprzężony do funktora zapominania. W powyższym przypadku taki funktor sprzężony (który zawsze idzie w przeciwnym kierunku, a więc w naszym przykładzie z Set do Group) przyporządkowuje każdemu zbiorowi grupę wolną (*free group*), której zbiorem wolnych generatorów jest dany zbiór.

4. Strzałki zamiast „$\in$"

W teorii mnogości zbiory określane są poprzez podanie w jakiś sposób elementów, które należą do danego zbioru. Na poziomie języka, w którym wyraża się aksjomaty teorii mnogości (Zermelo-Fraenkela), odpowiada temu używanie dwuargumentowego symbolu predykatywnego „$\in$". Zbadamy teraz, czy i jak w teorii kategorii, mając do dyspozycji jedynie strzałki pomiędzy obiektami, możemy mówić o jakichś elementach obiektów.

Spróbujmy zastosować tutaj metodę często stosowaną przy próbie znalezienia kategoryjnego odpowiednika pojęcia teoriomnogościowego. Metoda ta polega na tym, aby najpierw spróbować wyrazić rozważane pojęcie jedynie za pomocą funkcji pomiędzy zbiorami. Następnie próbujemy zdefiniować kategoryjny odpowiednik w kategorii Set, w której strzałkami są właśnie funkcje pomiędzy zbiorami, a następnie uogólniamy sytuację na dowolną kategorię. Oczywiście jest to jedynie zgrubny schemat. Pojęcia kategoryjne mają inną naturę. Wiele z nich, m.in. przez to, że są definiowane za pomocą morfizmów, jest określonych jedynie z dokładnością do izomorfizmu. Jest to ważna cecha teorii kategorii pokazująca jej strukturalny charakter.

Niech X będzie dowolnym niepustym zbiorem. Zauważmy, że zbiór funkcji o dowolnej jednoelementowej dziedzinie (oznaczmy ją jako $\{\star\}$) i przeciwdziedzinie X odpowiada jedno-jednoznacznie zbiorowi elementów zbioru X. Symbolicznie możemy to zapisać jako

$$f_i : \{\star\} \ni \star \longmapsto x_i \in X \, .$$

Należy teraz zdefiniować kategoryjnie obiekt odpowiadający w Set zbiorowi jednoelementowemu. Jak łatwo sprawdzić, czyni temu zadość następująca definicja:

Definicja 3. Obiekt $\mathsf{1}$ nazywamy *końcowym* (*terminal*), jeśli dla dowolnego obiektu A istnieje dokładnie jedna strzałka idąca z A do $\mathsf{1}$ (oznaczana $A \overset{!_A}{\dashrightarrow} \mathsf{1}$, gdzie linia przerywana graficznie obrazuje jedyność tej strzałki).

Dualnym pojęciem[16] jest *obiekt początkowy* (*initial*) (oznaczany $\mathsf{0}$), z którego idzie dokładnie jedna strzałka do każdego obiektu danej kategorii. Będziemy jednak mówić głównie o obiekcie końcowym.

Dana kategoria może w ogóle nie posiadać obiektu końcowego, może posiadać jeden taki obiekt lub wiele. Można jednak udowodnić proste twierdzenie, że obiekty końcowe, jeśli istnieją, są jednoznaczne z dokładnością do jedynego izomorfizmu, tj. jeśli $\mathsf{1}$ i $\mathsf{1}'$ są końcowe, to istnieje dokładnie jeden izomorfizm z $\mathsf{1}$ do $\mathsf{1}'$. To samo dotyczy oczywiście obiektów początkowych.

Spójrzmy na kilka przykładów. W Set obiektem końcowym jest dowolny zbiór jednoelementowy, początkowym jest zbiór pusty. W zbiorze częściowo uporządkowanym postrzeganym jako kategoria, obiektem końcowym jest element największy (jeśli istnieje), początkowym element najmniejszy (jeśli istnieje). W kategorii Group obiektem końcowym jest jednoelementowa grupa (składająca się jedynie z elementu neutralnego), która jest jednocześnie obiektem początkowym w tej kategorii.

Zgodnie z tym co zauważyliśmy powyżej, morfizmy $f_i : \mathsf{1} \to X$ w Set odpowiadają jedno-jednoznacznie elementom $x_i \in X$ (morfizmy f_i będziemy więc oznaczać także jako x_i lub po prostu x). Mo-

[16] Mówimy o pewnych pojęciach, że są wzajemnie dualne, gdy zamiana kierunku wszystkich strzałek w jednym pojęciu prowadzi do drugiego. Jeśli z danym pojęciem związane jest także składanie odwzorowań, należy także odpowiednio przedefiniować operację składania poprzez odwrócenie kolejności składanych morfizmów.

żemy więc myśleć o tych morfizmach jak o kategoryjnej wersji elementów zbioru X. Nic nie stoi na przeszkodzie, aby uogólnić ten typ morfizmów na dowolną kategorię posiadającą element końcowy.

Definicja 4. W kategorii $\mathcal{C}$ posiadającej obiekt końcowy $\mathsf{1}$, *elementem globalnym* dowolnego obiektu X nazywamy dowolny morfizm $\mathsf{1} \to X$.

Uzasadnienie użycia nazwy „globalny” podamy poniżej. Powyższe pojęcie, zdefiniowane teraz całkowicie na gruncie teorii kategorii, zaczyna funkcjonować już zgodnie z jej „filozofią”. Zauważmy więc, że np. w Group morfizmy są homomorfizmami grupowymi, a więc z grupy jednoelementowej (obiektu końcowego w Group) istnieje tylko jedna strzałka do dowolnej innej grupy[17], tj. każda (dowolnie wielka) grupa posiada tylko jeden element globalny.

Wprowadzimy teraz pojęcie, które potrafi odróżnić kategorie, w których elementy globalne w pewnym sensie w pełni penetrują obiekty, od tych, w których te elementy są niewystarczające (jak widzieliśmy powyżej na przykładzie Group).

Definicja 5. Niech $\mathcal{C}$ posiada obiekt końcowy $\mathsf{1}$. Niech ponadto X, Y będą dowolnymi $\mathcal{C}$-obiektami, a $f, g : X \to Y$ dowolnymi strzałkami z $\mathcal{C}(X, Y)$. $\mathcal{C}$ nazywamy *upunktowioną* (*well-pointed*), gdy z faktu, iż dla wszystkich elementów globalnych $x : \mathsf{1} \to X$ zachodzi $f \circ x = g \circ x$, wynika że $f = g$.

Jak łatwo sprawdzić Set jest upunktowiona, natomiast Group nie. Widzimy więc, że w teorii kategorii nie można ograniczyć się do elementów globalnych. Dlatego wprowadzamy szersze pojęcie.

[17] Jest tak dlatego, że każdy homomorfizm grupowy musi odwzorować element neutralny jednej grupy koniecznie w element neutralny drugiej grupy, gdyż inaczej nie byłby spełniony warunek homomorficzności tego odwzorowania, a więc zachowania struktury grupy.

Definicja 6. *Uogólnionym elementem* $\mathcal{C}$-obiektu X nazywamy (dowolną) $\mathcal{C}$-strzałkę o kodziedzinie X. Dziedzinę tej strzałki nazywamy *sceną* (*stage*) tego uogólnionego elementu.

Uogólnione elementy nazywane są czasami także zmiennymi elementami, a ich dziedziny, dziedzinami zmienności. Będziemy też mówić o nich po prostu jako o elementach. Rozważmy pewien taki element obiektu X, np. $x : A \to X$. Nazywanie A sceną lub dziedziną zmienności ma wyrażać intuicję, że obiekt A jest jakby miejscem, z którego ten element ogląda obiekt X. Stosuje się także oznaczenie $x \in_A X$, które można odczytywać jako „z punktu widzenia A (ze sceny A) x należy do X".

Możemy teraz wytłumaczyć nazywanie globalnymi elementów, których scena jest obiektem końcowym $\mathsf{1}$. Rozważmy dwa różne elementy globalne $x_1, x_2 : \mathsf{1} \to X$. Dla dowolnego obiektu A istnieje dokładnie jedna strzałka z tego obiektu w $\mathsf{1}$ (z definicji obiektu końcowego). Widzimy więc, że dowolnym globalnym elementom możemy w jednoznaczny sposób (dokładnie rzecz biorąc injektywnie, choć w ogólności nie surjektywnie) przyporządkować odpowiednie elementy uogólnione ze sceny A. Zobrazujmy to diagramem

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, dashed, "!_A"] \arrow[rr, bend left, "x_1 \circ !_A"] \arrow[rr, bend right, "x_2 \circ !_A"'] & \mathsf{1} \arrow[r, shift left, "x_1"] \arrow[r, shift right, "x_2"'] & X \end{tikzcd}$$

Można więc powiedzieć, że globalne obiekty są globalnie obserwowalne (z dowolnej sceny), stąd ich nazwa. Dlatego też zamiast $x \in_{\mathsf{1}} X$, możemy, niezbyt ściśle, pisać po prostu $x \in X$.

Uogólnione elementy już w pełni penetrują obiekty w dowolnej kategorii. Dokładnie rzecz biorąc można udowodnić twierdzenie mówiące, iż równoległe morfizmy $f, g : X \to Y$ w dowolnej kategorii są tożsame wtedy i tylko wtedy, gdy działają tak samo na wszystkich uogólnionych elementach[18].

Na koniec tej części zauważmy kilka podstawowych faktów. Sam obiekt końcowy ma (z definicji) dokładnie jeden element uogólniony z dowolnej sceny („na dowolnym stage'u"). Kategoria może w ogóle nie posiadać obiektu końcowego, a nawet jeśli go posiada, to dany (dowolny) obiekt może w ogóle nie posiadać globalnych elementów (po prostu może nie istnieć strzałka z $\mathsf{1}$ do tego obiektu), choć zawsze musi posiadać co najmniej jeden uogólniony element (swoją strzałkę identycznościową).

5. Dalsze pojęcia

Wprowadzimy teraz kolejne ważne dla teorii kategorii pojęcia, które ponadto będą nam potrzebne w dalszej części pracy. Omówimy je tylko pobieżnie, zainteresowanego Czytelnika odsyłamy do literatury wspomnianej we wstępie.

Zacznijmy od wzajemnie dualnych pojęć monomorfizmu i epimorfizmu.

Definicja 7. Strzałkę $f : A \to B$ nazywamy *monomorfizmem* (*monic*), jeśli dla dowolnej pary strzałek $g, h : C \to A$ z równości $f \circ g = f \circ h$ wynika, że $g = h$. Mówimy, że monomorfizmy są lewostronnie skracalne i oznaczamy je szczególnym rodzajem strzałki $f : A \rightarrowtail B$.

---

[18] Łatwo można to zobaczyć: skoro f, g działają tak samo na wszystkich uogólnionych elementach obiektu X, to w szczególności dotyczy to $\mathsf{1}_X : X \to X$, zatem $f \circ \mathsf{1}_X = g \circ \mathsf{1}_X$, a stąd $f = g$.

Strzałkę $f : A \to B$ nazywamy *epimorfizmem* (*epic*), jeśli dla dowolnej pary strzałek $g, h : B \to C$ z równości $g \circ f = h \circ f$ wynika, że $g = h$. Mówimy, że epimorfizmy są prawostronnie skracalne i oznaczamy je szczególnym rodzajem strzałki $f : A \twoheadrightarrow B$.

W **Set** pojęcie monomorfizmu pokrywa się z injektywnością funkcji, a epimorfizmu z surjektywnością. W **Group** pojęcia te pokrywają się z ich standardowym znaczeniem jako odpowiednich homomorfizmów grupowych. Zwracamy uwagę, że o ile w **Set** posiadanie własności monomorficzności i epimorficzności jednocześnie jest równoważne z izomorficznością, o tyle w ogólności nie jest to prawdą[19].

Mając już pojęcie monomorfizmu, możemy zdefiniować teraz tzw. podobiekty (*subobjects*), które są kategoryjnym odpowiednikiem podzbiorów. Rozważmy najpierw następującą definicję:

> Podobiektem obiektu X nazywamy dowolny monomorfizm $f : A \rightarrowtail X$ o kodziedzinie X.

Jak okaże się za chwilę, będziemy musieli nieco zmodyfikować powyższą próbę zdefiniowania podobiektu, spójrzmy jednak najpierw na pewne własności tak zdefiniowanego pojęcia.

Jeśli X jest zbiorem, to w ramach teorii mnogości rodzinę jego podzbiorów nazywamy zbiorem potęgowym tego zbioru i oznaczamy $\mathcal{P}(X)$. Relacja zawierania się zbiorów jest częściowym porządkiem na zbiorze potęgowym. Zatem struktura $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ rozważana jako częściowy porządek, zgodnie z wcześniejszymi rozważeniami, może

[19] Na przykład w rozważanej wcześniej kategorii odpowiadającej quasi-porządkowi, od jednego dowolnego obiektu do drugiego dowolnego obiektu jest co najwyżej jedna strzałka, zatem wszystkie strzałki są zarówno monomorfizmami, jak i epimorfizmami. Jednak bardzo prosto wskazać przykład kategorii, w której istnieje strzałka niebędąca izomorfizmem (choć jest zarówno mono- jak i epimorfizmem). Np. kategoria z dwoma obiektami i jedyną nieidentycznościową strzałką idącą od jednego do drugiego obiektu.

być traktowana jako kategoria, w której z obiektu A do B istnieje strzałka wtedy i tylko wtedy, gdy $A \subseteq B$. Wtedy następujący diagram (poniższy typ strzałek jest standardowo używany na oznaczenie inkluzji)

$$\begin{tikzcd} B \arrow[dr, hook] & \\ & X \\ A \arrow[uu, hook] \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

komutuje[20]. To zachowanie podpowiada nam definicję zawierania się pomiędzy podobiektami (danego, tego samego obiektu). Ze względu jednak na aktualnie tylko roboczą definicję podobiektu, wyrazimy ją w języku monomorfizmów.

Definicja 8. Mówimy, że monomorfizm $f : A \rightarrowtail X$ *zawiera się* w monomorfizmie $g : B \rightarrowtail X$, co oznaczamy $f \subseteq g$, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje strzałka $h : A \to B$ taka, że diagram

$$\begin{tikzcd} B \arrow[dr, tail, "g"] & \\ & X \\ A \arrow[uu, "h"] \arrow[ur, tail, "f"'] & \end{tikzcd}$$

komutuje (można pokazać, że także h jest wtedy monomorfizmem).

Dla podobiektów zdefiniowanych według naszej wstępnej definicji, zawieranie się powyższe nie posiada własności antysymetryczności, gdyż jeśli $f \subseteq g$ i $g \subseteq f$, to dziedziny morfizmów f i g są jedynie izomorficzne (a nie tożsame), a więc f nie musi być równe g. Takie podobiekty f i g o izomorficznych dziedzinach i tożsamych kodziedzinach możemy nazwać izomorficznymi i oznaczyć $f \simeq g$. Izomorfizm

---

[20] Komutowanie diagramu, jak i samo pojęcie diagramu w teorii kategorii, wyjaśniamy na s. 53. W skrócie oznacza to, iż złożenie strzałek wzdłuż różnych dróg daje ten sam wynik. W powyższym przypadku, komutowanie diagramu oznacza, że złożenie inkluzji $A \hookrightarrow B$ oraz $B \hookrightarrow X$ daje dokładnie inkluzję $A \hookrightarrow X$.

ten jest relacją równoważności, więc możemy utworzyć odpowiednie klasy równoważności

$$[f] = \{g : f \simeq g\} \ .$$

Owe klasy równoważności stanowią teraz właściwą definicję podobiektów.

Definicja 9. *Podobiektem* obiektu X nazywamy klasę równoważności monomorfizmów o kodziedzinie X ze względu na relację równoważności $\simeq$.

Rodzinę podobiektów obiektu X oznaczamy $\mathsf{Sub}(X)$ i możemy zapisać

$$\mathsf{Sub}(X) = \big\{[f] : f \text{ jest monomorfizmem takim, } \\ \text{że } \mathsf{cod}(f) = X\big\} \ . \tag{1}$$

Relację zawierania definiujemy teraz poprzez warunek

$$[f] \subseteq [g] \quad \text{wtw} \quad f \subseteq g \ .$$

Często upraszcza się jednak zapis (i język) pisząc, że f jest podobiektem (zamiast pisać $[f]$). My także przyjmiemy to uproszczenie.

Warto zauważyć, że w Set zachodzi

$$\mathsf{Sub}(X) \cong \mathcal{P}(X) \ , \tag{2}$$

a zatem pojęcie podobiektu rzeczywiście uogólnia (na dowolną kategorię) teoriomnogościowe pojęcie podzbioru.

Produkty i koprodukty obiektów

Wprowadzimy teraz dwa kolejne, dualne względem siebie pojęcia.

Definicja 10. *Produktem* obiektów A i B nazywamy obiekt $A \times B$ wraz z parą strzałek ($\pi_1 : A \times B \to A$, $\pi_2 : A \times B \to B$) taki, że dla dowolnej pary strzałek $f : C \to A$ i $g : C \to B$ istnieje dokładnie jedna strzałka $\langle f, g\rangle : C \to A \times B$ (nazywana czasem strzałką iloczynową) czyniąca komutatywnym diagram

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, bend right, "f"'] \arrow[d, dashed, "\langle f,g\rangle"] \arrow[dr, bend left, "g"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & B \end{tikzcd}$$

Zachodzi więc $\pi_1 \circ \langle f, g\rangle = f$ i $\pi_2 \circ \langle f, g\rangle = g$ (morfizmy $\pi_1,\ \pi_2$ pełnią zatem funkcję odpowiednich rzutowań i tak również bywają nazywane).

Podobnie jak np. obiekt końcowy, również produkty zdefiniowane są tylko z dokładnością do jedynego izomorfizmu. Produktem dwóch zbiorów w Set jest ich iloczyn kartezjański (wraz z trywialnymi strzałkami rzutowań), a dwóch grup w Group iloczyn kartezjański grup (wraz z rzutowaniami). Produktem w quasi-porządku (o ile dany produkt istnieje) jest największe dolne ograniczenie, tj. kres dolny (wraz z odpowiednimi strzałkami). W częściowym porządku (która to kategoria, jak widzieliśmy, jest szkieletowa) produkt ten, o ile istnieje, jest jedyny.

Warto przytoczyć jeszcze jeden przykład produktu. W tym celu zauważmy, że jeśli jako obiekty pewnej kategorii przyjmiemy formuły jakiegoś języka zerowego (lub pierwszego) rzędu L, a co do strzałek założymy, że z obiektu φ do ψ istnieje maksymalnie jedna strzałka i to wtedy i tylko wtedy, gdy z formuły φ wynika logicznie formuła ψ (co oznaczamy za pomocą relacji konsekwencji semantycznej $\varphi \vDash \psi$), to rzeczywiście otrzymamy w ten sposób kategorię, którą oznaczmy Prop_L. Jak łatwo sprawdzić, w Prop_L produktem dwóch dowolnych formuł będzie ich koniunkcja wraz z trywialnymi strzałkami rzutowań (na poszczególne człony koniunkcji).

Przykład pojęcia produktu jest zatem kolejnym dobrym przykładem na dużą abstrakcyjność i uniwersalność pojęć kategorialnych, w tym sensie, że pojęcie produktu sprowadza się w różnych kategoriach do tak standardowo odmiennych pojęć, jak iloczyn kartezjański zbiorów lub grup, kres dolny czy koniunkcja. Kategorialne pojęcie produktu abstrahuje zatem coś wspólnego w tych i innych pojęciach i wyprowadza nas przez to na zupełnie nowy poziom matematycznej abstrakcji. Jest to dobry przykład specyficznego charakteru całej teorii kategorii.

Pojęciem dualnym do produktu jest koprodukt (ścisłą definicję podajemy w dodatku II). Oczywiście także koprodukty zdefiniowane są z dokładnością do izomorfizmu. Koproduktem w Set jest rozłączna suma zbiorów, natomiast w quasi-porządku jest to najmniejsze górne ograniczenie, tj. kres górny (o ile istnieje). W częściowym porządku, tak jak to było dla produktu, koprodukt, o ile istnieje, jest jedyny. W Prop_L koproduktem jest logiczna alternatywa danych formuł.

Częściowy porządek, w którym dowolne dwa elementy mają zarówno kres dolny, jak i górny jest (z definicji) kratą. Widzimy więc, że w języku kategoryjnym kratą jest częściowy porządek mający produkt i koprodukt dla dowolnych dwóch elementów.

6. Logika zdań w toposach

Kwestia zastosowania teorii kategorii w logice jest bardzo rozległa. Powstała nawet osobna dziedzina zwana logiką kategoryjną (*categorical logic*). W niniejszej sekcji zarysujemy jedynie znaczenie semantyczne pewnych kategorii zwanych toposami (ich definicję przedstawimy po omówieniu koniecznych do tego pojęć) dla języków zdaniowych.

Będziemy używać następujących oznaczeń: KRZ na logikę klasyczną zdań (klasyczny rachunek zdań) oraz INT na intuicjonistyczną logikę zdań (nieco więcej piszemy o niej w sekcji 7). Pisząc krótko o logice będziemy zawsze rozumieli logikę zerowego rzędu, tj. zdań.

Już na początku warto zauważyć, że podejście kategoryjne do matematyki ma swoją wyjątkową specyfikę. Nie zakładamy w punkcie wyjścia obowiązującej logiki, której będą podlegały różne obiekty matematyczne, lecz logika będzie częścią struktury toposów. To właśnie ze struktury strzałek danego toposu będziemy mogli odczytać logikę, jaka obowiązuje w danym toposie. Struktura toposu będzie decydowała zarówno o typie logiki (co możemy wyrazić przez aksjomaty, jakie są spełnione w danym toposie), jak i np. o ilości wartości logicznych obecnych w danym toposie traktowanym jako semantyka odpowiedniej logiki.

Do omówienia logiki toposu musimy teraz rozważyć centralne pojęcie klasyfikatora podobiektów.

Klasyfikator podobiektów

Kluczowym obiektem dla logicznej struktury toposów jest tzw. klasyfikator podobiektów (*subobject classifier*). Nie będziemy rozważać dokładnej definicji tego pojęcia (można je znaleźć np. w (Goldblatt, 2006, s. 81)), omówimy tylko jego rolę oraz podamy niektóre przykłady.

Klasyfikatorem podobiektów w kategorii $\mathcal{C}$ posiadającej obiekt końcowy jest pewien obiekt (oznaczany przez Ω) wraz ze strzałką będącą elementem globalnym obiektu Ω, oznaczaną $\top : \mathbf{1} \to \Omega$. Ze względów o których poniżej, $\top$ nazywa się strzałką prawdziwościową (*truth arrow*) i czasami oznacza się ją po prostu jako *true*, czyli prawda. Jak sugeruje sama nazwa, klasyfikator podobiektów rzeczywiście klasyfikuje podobiekty. Można mianowicie udowodnić, że istnieje wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie podobiektów dowolnego obiektu X strzałkom $X \to \Omega$ (czyli elementom uogólnionym klasyfikatora podobiektów ze sceny X), co możemy zapisać

$$\mathsf{Sub}(X) \cong \mathcal{C}(X, \Omega)\,. \tag{3}$$

Wprowadźmy pewne oznaczenie na powyższe przyporządkowanie: strzałkę, która odpowiada podobiektowi f będziemy oznaczać przez χ_f.

Jak zawsze, spójrzmy najpierw na sytuację w Set. Obiektem Ω jest tutaj dwuelementowy zbiór, np. $\{0, 1\}$, o którym możemy myśleć jako o zbiorze wartości logicznych (fałsz i prawda). Jest jasne, że funkcje z danego zbioru X w zbiór $\{0, 1\}$ wyznaczają wzajemnie jednoznacznie podzbiory zbioru X (poprzez funkcje charakterystyczne przyjmujące wartość 1 na danym podzbiorze, a poza nim 0, stąd wprowadzone powyżej oznaczenie χ_f). Przykłady niektórych własności klasyfikatorów podobiektów w innych toposach podamy w sekcji 7.

Toposy

Ze względu na brak odpowiednich pojęć, nie możemy w niniejszej pracy podać ścisłej definicji toposu. Aby jednak nieco dokładniej opisać czym jest topos[21] zauważmy, że kategoria Set posiada następujące własności:

[21] Wzorujemy się w tym opisie na (Bell, 2008, s. 113).

1. Istnieje obiekt końcowy $\mathbf{1}$ (którym w Set jest dowolny zbiór jednoelementowy).
2. Dla dowolnej pary obiektów A, B istnieje ich produkt $A \times B$ (którym w Set jest np. ich iloczyn kartezjański).
3. Dla dowolnej pary obiektów A, B istnieje obiekt oznaczany przez B^A (tzw. obiekt wykładniczy (*exponential object*)), którego elementy odpowiadają morfizmom $A \to B$ (w Set jest to np. zbiór wszystkich funkcji o dziedzinie A i przeciwdziedzinie B).
4. Istnieje klasyfikator podobiektów Ω (zwany także obiektem wartości prawdziwościowych (logicznych)), wraz z wyróżnionym elementem globalnym *prawda* ($\top$) (w Set jest to np. zbiór $\{0, 1\}$, a prawdą jest standardowo 1). Zauważmy, że dla dowolnego obiektu X, obiekt Ω^X odpowiada zbiorowi potęgowemu zbioru X[22].

Wszystkie powyższe cztery warunki mogą być wyrażone w czysto kategoryjnym języku, tj. jedynie za pomocą strzałek (dwa pierwsze zostały już wcześniej wyrażone przez nas w ten sposób).

Możemy teraz nieściśle (jedynie dlatego, że nie podaliśmy dokładnej definicji ani obiektu wykładniczego, ani klasyfikatora podobiektów) przyjąć, że (elementarnym) toposem nazywamy dowolną kategorię, która spełnia powyższe cztery warunki[23].

W dalszej części pracy będziemy potrzebowali także następującej definicji.

---

[22] Jest tak, ponieważ zgodnie z wcześniejszym punktem Ω^X odpowiada rodzinie strzałek z X do Ω, a ponadto zachodzi (3) i (2).

[23] Początkowo w definicji elementarnego toposu przyjmowano znacznie mocniejsze warunki. Z czasem okazało się jednak, że wystarczy założyć jedynie te powyższe, a pozostałe własności są dowodliwe na mocy tych założeń. Przede wszystkim można udowodnić, że każdy taki topos posiada także dowolne tzw. granice i kogranice, a więc m.in. poznane już przez nas koprodukty.

Definicja 11. Topos nazywamy *zdegenerowanym* (*degenerate*), jeśli wszystkie jego obiekty są izomorficzne.

Teoria toposów ma zastosowanie zarówno w syntaktycznym jak i w semantycznym podejściu do logiki, my jednak zajmiemy się jedynie częścią semantyczną.

Semantyka toposów

Załóżmy więc, że mamy dany pewien język zdaniowy (zerowego rzędu). Niech Z oznacza zbiór symboli zdaniowych (zdań atomowych), a $\mathsf{Fm}(Z)$ zbiór wszystkich sensownych formuł w tym języku, czyli zdań utworzonych poprawnie za pomocą symboli zdaniowych należących do Z i standardowych symboli logicznych $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ (jak i ewentualnie nawiasów jako symboli pomocniczych).

W tradycyjnym podejściu modelem lub wartościowaniem nazywamy dowolne przyporządkowanie symbolom zdaniowym wartości logicznych prawdy lub fałszu, a więc odwzorowanie $Z \to \{0, 1\}$. Odwzorowanie to rozszerzamy następnie na wszystkie zdania, tj. na cały zbiór $\mathsf{Fm}(Z)$. W tym celu definiujemy (np. za pomocą tzw. tabelek) działanie symboli logicznych jako odpowiednich funkcji na wartościach logicznych (lub ich parach), np. $\vee : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \to \{0, 1\}$ jest zdefiniowana tak, że jako funkcja $\vee(0, 0) = 0$, w pozostałych przypadkach przyjmuje wartość 1.

Korzystając z odpowiednich pojęć teorii kategorii można wyrazić działanie tych symboli logicznych w języku strzałek (nie jest to zupełnie trywialne zadanie, gdyż jak pamiętamy w teorii kategorii nie możemy odnosić się do poszczególnych elementów obiektów, jednak jest to wykonalne). Ponadto możemy w naturalny sposób uogólnić ich działanie do sytuacji, gdy zamiast zbioru $\{0, 1\}$ mamy obiekt Ω (klasyfikator podobiektów, pełniący rolę obiektu wartości logicznych). W ten sposób otrzymujemy działanie symboli logicznych w dowolnym toposie jako odpowiednich strzałek: $\neg : \Omega \to \Omega$ dla negacji, natomiast pozostałe symbole logiczne są różnymi strzałkami $\Omega \times \Omega \to \Omega$[24] (nie podajemy tutaj dokładnej definicji tych strzałek, można je znaleźć np. w (Goldblatt, 2006, s. 139)). Zwracamy uwagę, że czymś innym są symbole logiczne jako część alfabetu danego języka, a czymś innym symbole logiczne zdefiniowane jako odpowiednie strzałki w toposie. Ze względów praktycznych, aby nie rozszerzać zbytnio notacji, pozostawiliśmy jednak te same oznaczenia na różnie rozumiane symbole logiczne.

Podkreślmy, że tak zdefiniowane symbole logiczne stanowią uogólnienie na dowolny topos standardowych symboli logicznych. Można mianowicie udowodnić, że w dowolnym toposie (mającym na przykład nieskończenie wiele wartości logicznych), działanie tych symboli logicznych na (zawsze obecnych) wartościach prawdy ($\top$) i fałszu ($\bot$)[25] sprowadza się zawsze do standardowego ich działania (zob. np. Goldblatt, 2006, s. 142, tw. 1). W szczególności, dla toposu Set otrzymujemy dwuwartościową logikę ze standardowo działającymi symbolami logicznymi, a więc logikę klasyczną. W ogólności jednak, o czym poniżej, logika jaka obwiązuje w dowolnym toposie nie będzie klasyczna.

---

[24] Produkt obiektów zdefiniowaliśmy w definicji 10.

[25] Fałsz, $\bot : 1 \to \Omega$ definiujemy w każdym toposie, jako $\chi_{!_0}$, gdzie $!_0 : 0 \to 1$ jest jedyną strzałką idącą z 0 do 1. W każdym toposie $!_0$ będzie monomorfizmem, jest to więc podobiekt obiektu końcowego.

Definicja semantyki w toposach

Zdefiniujmy teraz semantykę w dowolnym toposie $\mathcal{E}$. Elementy globalne obiektu Ω, czyli strzałki $\mathsf{1} \to \Omega$ pełnią rolę wartości logicznych (*truth-values*) jakie mogą przyjmować zdania przy danym wartościowaniu. Rodzinę wszystkich wartości logicznych możemy więc zapisać jako $\mathcal{E}(\mathsf{1}, \Omega)$.

Określmy teraz wartościowanie zdań logicznych w toposie.

Definicja 12. *$\mathcal{E}$-wartościowaniem* (*$\mathcal{E}$-valuation*) nazywamy dowolną funkcję $V : Z \to \mathcal{E}(\mathsf{1}, \Omega)$.

$\mathcal{E}$-wartościowanie przypisuje więc każdemu symbolowi zdaniowemu wartość logiczną (tj. strzałkę $\mathsf{1} \to \Omega$). Korzystając z działania symboli logicznych jako strzałek $\Omega \to \Omega$ (dla $\neg$) lub $\Omega \times \Omega \to \Omega$ (dla pozostałych symboli logicznych), rozszerzamy teraz jednoznacznie (analogicznie do standardowej procedury w ramach semantyki KRZ) $\mathcal{E}$-wartościowanie na cały zbiór $\mathsf{Fm}(Z)$ wszystkich zdań poprzez warunki:

$$V(\neg\alpha) = \neg \circ V(\alpha)$$

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{1} \arrow[r, "V(\alpha)"] \arrow[dr, "V(\neg\alpha)"'] & \Omega \arrow[d, "\neg"] \\
& \Omega
\end{tikzcd}$$

$$V(\alpha \wedge \beta) = \wedge \circ \langle V(\alpha), V(\beta) \rangle$$

$$\begin{tikzcd}
& & \mathsf{1} \arrow[dll, bend right, "V(\alpha)"'] \arrow[d, dashed, "\langle V(\alpha),V(\beta)\rangle"] \arrow[drr, bend left, "V(\beta)"] \arrow[dd, bend right, "V(\alpha\wedge\beta)"'] & & \\
\Omega & & \Omega \times \Omega \arrow[ll, "\pi_1"] \arrow[rr, "\pi_2"'] \arrow[d, "\wedge"] & & \Omega \\
& & \Omega & &
\end{tikzcd}$$

gdzie $\langle V(\alpha), V(\beta)\rangle$ jest strzałką produktową strzałek $V(\alpha)$ i $V(\beta)$ (zob. definicja 10) oraz dla pozostałych dwóch symboli logicznych (analogicznie do koniunkcji):

$$V(\alpha \vee \beta) = \vee \circ \langle V(\alpha), V(\beta)\rangle\,, \quad V(\alpha \to \beta) = \to \circ \langle V(\alpha), V(\beta)\rangle\,.$$

W wyniku tej operacji (wykonywanej indukcyjnie ze względu na złożoność formuł) otrzymujemy pełne $\mathcal{E}$-wartościowanie będące przyporządkowaniem każdej formule z $\mathsf{Fm}(Z)$ wartości logicznej będącej strzałką $\mathsf{1} \to \Omega$.

Możemy teraz zdefiniować relację spełniania w toposie.

Definicja 13. Mówimy, że zdanie α jest *$\mathcal{E}$-tautologią* (*$\mathcal{E}$-valid*), co oznaczamy $\mathcal{E} \vDash \alpha$, jeśli dla dowolnego $\mathcal{E}$-wartościowania V, zachodzi $V(\alpha) = \top : \mathsf{1} \to \Omega$.

7. Niektóre własności logiki toposów

Zanim omówimy nieco dokładniej różne logiki jakie obowiązują w toposach (rozumiane tutaj przede wszystkim semantycznie jako odpowiednie zbiory $\mathcal{E}$-tautologii) podkreślmy raz jeszcze, że logika dowolnego toposu nie jest w żaden sposób narzucona z zewnątrz, lecz wynika ze struktury strzałek danego toposu z kluczową rolą strzałek związanych z klasyfikatorem podobiektów. Każdy topos posiada określoną logikę, o której można by powiedzieć, że nie mamy na nią wpływu, możemy ją jedynie odkryć, opisać i ewentualnie jakoś użyć. W niniejszym opracowaniu omówimy jedynie niektóre własności logiki toposów. Powtórzmy, że ograniczamy się jedynie do logiki zdań, a także skupimy się na pokazaniu pewnych powiązań logiki toposów z KRZ (omówimy m.in. dwie rodziny toposów, w których zbiór tautologii pokrywa się dokładnie z tautologiami KRZ). Należy jednak podkreślić, że bogactwo logiki toposów ujawnia się przede wszystkim w intuicjonistycznej logice wyższych rzędów.

Cała konstrukcja semantyki zdań w dowolnym toposie jest uogólnieniem standardowej klasycznej dwuwartościowej semantyki. Można mianowicie udowodnić, że dowolne zdanie jest Set-tautologią (w sensie $\mathcal{E}$-tautologii w toposie Set) wtedy i tylko wtedy, gdy jest tautologią klasycznego rachunku zdań (dalej nazywamy je po prostu tautologiami i oznaczamy $\vDash_{\mathsf{KRZ}} \alpha$), co możemy zapisać symbolicznie

$$\mathsf{Set} \vDash \alpha \quad \text{wtw} \quad \vDash_{\mathsf{KRZ}} \alpha\,.$$

Zatem semantyka toposów w tym sensie uogólnia standardową klasyczną dwuwartościową semantykę, że jest o wiele bogatszą semantyką, która w przypadku toposu Set odtwarza dokładnie klasyczne tautologie.

Logiką panującą we wszystkich toposach jest logika intuicjonistyczna. Przy odpowiednio dobranej liście aksjomatów klasycznej logiki (np. jak w Goldblatt, 2006, s. 131), możemy powiedzieć, że logika intuicjonistyczna posiada wszystkie aksjomaty klasycznej logiki zdań z wyjątkiem aksjomatu wyłączonego środka ($\alpha \vee \neg\alpha$) oraz regułę wnioskowania taką samą, jak w klasycznej logice (tj. regułę odrywania (*modus ponens*)). Semantyka logiki intuicjonistycznej jest inna niż klasycznej. Właściwą semantyką, w sensie spełniania twierdzenia o pełności, jest np. semantyka topologiczna, czy semantyka Kripkego. Zainteresowanego Czytelnika odsyłamy do literatury (Dummett, 2000; Heyting, 1971; Troelstra i Dalen, 1988; Dalen, 2002).

W każdym toposie spełnione są wszystkie aksjomaty INT, a reguła wnioskowania zachowuje prawdę, tak więc w każdym toposie obowiązują wszystkie twierdzenia (równoważnie tautologie) INT. W niektórych toposach mogą być jednak spełnione także inne aksjomaty, np. w Set obowiązuje także wyłączony środek, przez co logika w tym toposie jest klasyczna. W ogólności zatem w toposach spotykamy różne tzw. pośrednie logiki (*intermediate logics*)[26]. Jako że najmocniejszą taką logiką jest KRZ, logika w dowolnym toposie jest zatem słabsza od KRZ lub jej równa, a więc dowolna $\mathcal{E}$-tautologia (dla dowolnego toposu $\mathcal{E}$) jest tautologią KRZ (zob. Goldblatt, 2006, s. 143, tw. 2), co możemy zapisać symbolicznie

$$\text{jeżeli } \mathcal{E} \models \alpha, \text{ to } \models_{\mathsf{KRZ}} \alpha. \tag{4}$$

W celu omówienia algebraicznego aspektu logiki zdań toposów, przypomnijmy, że istnieje ścisła odpowiedniość między spójnikami KRZ (negacją, alternatywą, koniunkcją i implikacją), a podstawowymi operacjami na podzbiorach danego zbioru (dopełnienie, suma, iloczyn i zawieranie się zbiorów). I tak np. sumę dowolnych podzbiorów zbioru X definiujemy za pomocą alternatywy: $A \cup B = \{x \in X : x \in A \vee x \in B\}$. Zbiór potęgowy $\mathcal{P}(X)$ z operacjami sumy, iloczynu i dopełnienia wraz z elementem najmniejszym (zbiór pusty) i największym (cały zbiór X) jest jednym z podstawowych przykładów struktury zwanej algebrą Boole'a. Jest ona algebraicznym odpowiednikiem klasycznej logiki (jest to tzw. algebra Lindenbauma-Tarskiego KRZ).

W teorii kategorii jako odpowiednik zbioru potęgowego $\mathcal{P}(X)$ rozważaliśmy powyżej (zob. (1) i (2)) rodzinę podobiektów $\mathsf{Sub}(X)$[27]. Zdefiniowaliśmy tam także relację zawierania się między podobiektami (które są, przypomnijmy, odpowiednimi strzałkami) będącą kategoryjnym odpowiednikiem zawierania się zbiorów. Okazuje

---

[26] Z definicji są to niesprzeczne logiki zdań rozszerzające INT.

[27] Właściwym odpowiednikiem $\mathcal{P}(X)$ w toposach jest ściśle rzecz biorąc obiekt wykładniczy Ω^X. $\mathsf{Sub}(X)$ jest pojęciem zewnętrznym względem danej kategorii (zob. dyskusja pod koniec niniejszej sekcji).

się, że można także zdefiniować kategoryjne odpowiedniki sumy, iloczynu i dopełnienia. Jednak odpowiednia algebra podobiektów, choć jest zawsze ograniczoną, dystrybutywną kratą i spełnia nawet jeden z warunków pochłaniania[28], nie jest w ogólności algebrą Boole'a! Jest to przejaw tego, że logika toposów w ogólności nie jest klasyczna. Algebrą podobiektów okazuje się być tzw. algebra Heytinga[29]. Odzwierciedla to fakt, że w toposach obowiązuje INT, czy dokładniej logika pośrednia[30].

Powróćmy teraz do związków logiki toposów z KRZ. Wiemy już, że zawsze dowolna $\mathcal{E}$-tautologia jest tautologią KRZ (zob. (4)). Kiedy jednak implikacja zachodzi także w drugą stronę, tj. w jakich toposach zbiór $\mathcal{E}$-tautologii pokrywa się z tautologiami KRZ? Opiszemy dwie takie grupy toposów, które choć nie tożsame, będą jednak miały (niepustą) część wspólną. Pierwszą grupę stanowią tzw. toposy dwuwartościowe.

Definicja 14. Niezdegenerowany topos nazywamy *dwuwartościowym* (*bivalent*), jeśli prawda ($\top$) i fałsz ($\bot$) są jego jedynymi wartościami logicznymi (globalnymi elementami klasyfikatora podobiektów).

---

[28] Mianowicie dla dowolnego podobiektu f zachodzi $f \cap -f = 0$, jednak w ogólności nie zachodzi $f \cup -f = 1$. Ten ostatni warunek jest jedynym z listy aksjomatów algebry Boole'a, który może nie być spełniony.

[29] Definicję i różne własności algebr Heytinga Czytelnik znajdzie np. w (Rasiowa i Sikorski, 1963) lub (Goldblatt, 2006).

[30] Przy standardowej definicji wartościowania zdań logicznych w algebrze Heytinga, ogół zdań będących H-tautologiami (tj. przyjmujących wartość jedynki w algebrze przy dowolnym wartościowaniu), jest zbiorem tautologii pewnej pośredniej logiki. Zdania będące H-tautologiami dla dowolnej algebry Heytinga H tworzą natomiast dokładnie zbiór tautologii INT. Można ponadto udowodnić, że dane zdanie jest $\mathcal{E}$-tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy jest ono H-tautologią dla algebry Heytinga $\mathsf{Sub}(1)$, gdzie 1 jest obiektem końcowym toposu $\mathcal{E}$.

Rzeczywiście zachodzi twierdzenie (zob. Goldblatt, 2006, s. 143, tw. 3) stanowiące, że jeżeli topos $\mathcal{E}$ jest dwuwartościowy, to dla dowolnego zdania α zachodzi:

$$\mathcal{E} \models \alpha \quad \text{wtw} \quad \models_{\mathsf{KRZ}} \alpha. \tag{5}$$

Zwróćmy uwagę, że w tym twierdzeniu dwuwartościowość toposu pociąga własność (5), jednak w drugą stronę implikacja nie zachodzi. Są zatem także inne toposy, nie dwuwartościowe, których tautologie są jednak tożsame z tautologiami klasycznego rachunku zdań. Takim toposem jest np. Set^2 (definicję tej kategorii podajemy w dodatku I) mający cztery wartości logiczne.

Drugą grupę toposów, których zbiór tautologii pokrywa się z tautologiami KRZ, są tzw. toposy klasyczne.

Definicja 15. Topos nazywamy klasycznym (*classical*), jeśli $[\top, \bot] : \mathsf{1} + \mathsf{1} \to \Omega$ jest izomorfizmem.

Zauważmy, że w każdym toposie istnieją $\top$ i $\bot$ oraz dowolne koprodukty, więc strzałka $[\top, \bot]$ (por. definicja 16 w dodatku II) jest zawsze dobrze określona. Toposy klasyczne mogą, ale nie muszą być dwuwartościowe. Przykładem toposu klasycznego niedwuwartościowego jest wspomniany powyżej topos Set^2.

Przedstawimy jeszcze inną charakterystykę klasycznych toposów. Wspominaliśmy powyżej, że w każdym toposie algebra podobiektów jest algebrą Heytinga. Jeśli jednak dla każdego obiektu w toposie algebra podobiektów jest boolowska, to taki topos nazywamy boolowskim. Co więcej, okazuje się, że strukturą podobiektów dowolnego obiektu w toposie rządzi klasyfikator podobiektów (dokładnie struktura jego podobiektów), gdyż jeśli $\mathsf{Sub}(\Omega)$ jest algebrą Boole'a, to wszystkie algebry podobiektów także są boolowskie. Boolowskość toposu jest jednak tylko innym obliczem jego klasyczności, gdyż można pokazać, że topos jest boolowski wtedy i tylko wtedy, gdy jest klasyczny (zob. Goldblatt, 2006, s. 156n, tw. 1).

Popatrzmy jeszcze na kilka przykładów. Wspomnieliśmy już, że topos może być klasyczny, ale nie dwuwartościowy (podaliśmy przykład Set^2). Możliwa jest także sytuacja odwrotna, topos może być dwuwartościowy, choć nie klasyczny[31]. Natomiast przykładem toposu, który nie jest ani klasyczny, ani dwuwartościowy może być $\mathsf{Set}^{\rightarrow}$ (zob. dodatek I) (ma on trzy wartości logiczne). W toposie tym jednak nie jest spełniona zasada wyłączonego środka (zob. Goldblatt, 2006, s. 142).

Zwróćmy uwagę, że w Set koprodukt $\mathsf{1}+\mathsf{1}$ jest dwuelementowym zbiorem, który jest izomorficzny z $\{0,1\}$, będącym klasyfikatorem podobiektów w tym toposie. Widzimy więc, że pojęcia dwuwartościowości i klasyczności toposu, choć w ogólności różne, pokrywają się jednak w Set. Jest to dobry przykład bogactwa teorii kategorii, w której niektóre pojęcia pokrywające się w toposie Set, a więc w tym sensie nierozróżnialne w ramach podejścia teoriomnogościowego, są jednak w ogólności różnymi pojęciami kategoryjnymi. Teoria kategorii okazuje się więc w takich sytuacjach bardziej precyzyjna i bogatsza pojęciowo od teorii mnogości.

Pojęcia dwuwartościowości i klasyczności są powiązane z wcześniej wprowadzonym pojęciem upunktowionej kategorii. Zachodzi mianowicie twierdzenie (por. Goldblatt, 2006, s. 118, tw. 2 i s. 120, tw. 4) stanowiące, że jeśli $\mathcal{E}$ jest niezdegenerowanym upunktowionym toposem, to $\mathcal{E}$ jest zarówno dwuwartościowy, jak i klasyczny.

Na koniec zwróćmy jedynie uwagę, że w naszej pobieżnej analizie znaczenia toposów dla logiki (czy także we wcześniejszym opisie

[31] Nie podajemy przykładu, gdyż wymagałoby to wprowadzenia nowych definicji. Zainteresowanego Czytelnika odsyłamy do (Goldblatt, 2006, s. 122n).

rodziny podobiektów danego obiektu w kategorii) korzystaliśmy często z tzw. opisu zewnętrznego (*external*), w którym odwoływaliśmy się nieraz do konstrukcji formalnie nienależących do danej kategorii. I tak np. rodzina podobiektów $\mathsf{Sub}(X)$, która sama może nie być obiektem danego toposu (kategorii), jest więc zasadniczo zewnętrzna względem niego. Jeśli chcemy myśleć o toposie jako o samodzielnym uniwersum matematycznego dyskursu (jak to się robi chociażby w ramach podejścia kategoryjnego do podstaw matematyki, por. np. (Bell, 1986; 1981)), wtedy w ramach tego uniwersum formalnie postrzega się jedynie indywidua do niego należące. Obiektem, który jest wewnętrzną (*internal*) wersją pojęcia odpowiadającego zbiorowi potęgowemu, jest obiekt wykładniczy Ω^X (lub, jeśli kategoria nie posiada klasyfikatora podobiektów, definiowalny niezależnie od Ω, tzw. obiekt potęgowy (o ile istnieje)), podczas gdy $\mathsf{Sub}(X)$ jest jego zewnętrzną wersją. Podobnie rozważana przez nas rodzina wartości logicznych $\mathcal{E}(1, \Omega)$ także należy do opisu zewnętrznego. Jej wersją wewnętrzną byłby obiekt $\Omega^1 \cong \Omega$. Nie wchodząc głębiej w tę tematykę, gdyż chcieliśmy jedynie zwrócić uwagę Czytelnika na rozróżnienie i obecność obu opisów: zewnętrznego i wewnętrznego, zakończmy jednak stwierdzeniem, że obecny zewnętrzny opis semantyki toposów jest bardzo cenny w rozjaśnianiu logicznych własności toposów.

8. Przegląd innych zastosowań teorii kategorii w filozofii

Wprowadzenie do niektórych podstawowych pojęć teorii kategorii oraz omówienie niektórych związków TK z logiką zdań, co było przedmiotem dotychczasowych rozważań, były głównymi zamierzeniami niniejszej pracy. Zauważmy jednak, że znaczenie TK dla filozofii, choć jak się nam wydaje w znacznej mierze ciągle czekające na odkrycie, nie ogranicza się jedynie do logiki. W literaturze pojawia się wiele artykułów traktujących o znaczeniu TK dla takich zagadnień, jak chociażby wspominane już strukturalizm, czy podstawy matematyki (zob. np. Awodey, 2004; Hellman, 2006; McDonald, 2012; Landry i Marquis, 2005; Bell, 1981; Bondecka-Krzykowska i Murawski, 2008).

W kontekście zastosowań TK w filozofii, warto wspomnieć także wydaną ostatnio książkę (Landry, 2018)[32] o charakterystycznym tytule *Categories for the Working Philosopher*, będącą obszernym zbiorem prac szeregu uznanych autorów, traktującą właśnie o zastosowaniach TK w obszarach „od matematyki przez teorię dowodu, informatykę do ontologii, od fizyki przez biologię do nauk kognitywnych, od modelowania matematycznego przez strukturę teorii naukowych do struktury świata" (zob. Landry, 2018, s. vii, tłum. moje).

Chcemy na koniec omówić krótko kilka prac związanych z pewnymi zastosowaniami TK w filozofii (ze szczególnym uwzględnieniem wkładu polskich uczonych). Temat zastosowań TK jest bardzo obszerny, dlatego poniższe uwagi należy traktować jedynie jako wybiórcze zestawienie kilku przykładów. W żadnym wypadku nie jest to systematyczny przegląd zastosowań TK w filozofii, nie wspominając o zastosowaniach w innych dyscyplinach, szczególnie w fizyce (por. przypis 6 niniejszej pracy) i informatyce.

Wspomnijmy najpierw pracę (Heller, 2015), w której autor m.in. porusza temat związków TK z filozofią czasu i przestrzeni (a także ogólniej z filozofią fizyki). Możemy tam przeczytać o uogólnieniu pojęcia przestrzeni przez A. Grothendiecka i jego toposy, a także o tym, iż zastosowanie narzędzi kategoryjnych do filozofii przestrzeni

[32] Dziękuję jednemu z anonimowych recenzentów za wskazanie mi tej (i kilku innych) publikacji.

nie tylko ujawnia niespodziewane aspekty starej dyskusji o relacyjnej, bądź substancjalnej naturze przestrzeni, ale także pokazuje związek logiki z samymi podstawami idei przestrzeni (zob. m.in. Heller, 2015, s. 197). W pracy tej M. Heller podaje także przykład kategorii **Leib**, która, jak sam autor pisze, pomimo ogromnej oszczędności oraz stanowiąc jedynie tzw. *toy-model*, może być interpretowana jako model Leibnizowskiej monadologii.

Zbigniew Król w swojej książce (Król, 2006) rozważa także kwestię zastosowań TK w filozofii, w tym przypadku w filozofii matematyki. Pisze m.in. o znaczeniu TK dla podstaw matematyki (stwierdza m.in., że „powstanie teorii kategorii zmieniło radykalnie sytuację w podstawach matematyki" (zob. s. 134)), czy o związku z hermeneutyczną strukturą „jeden-nad-wielością" (zob. szczególnie s. 132n). Przytacza także kilka twierdzeń dotyczących logiki panującej w toposach, o których my także pisaliśmy w sekcji 7. W pracy (Król, 2011), tenże autor twierdzi także, że teoria kategorii jest „najbardziej platońską teorią w sensie stosowanych metod" (s. 110) oraz wspomina ważną kwestię, mianowicie, że „rozwój teorii kategorii skłania do rezygnacji z jednego globalnego teoriomnogościowego środowiska, areny dla uprawiania całej matematyki, i zastąpienia go przez szereg lokalnych kategorialnych struktur" (s. 111). Tę ostatnią kwestię omawia szerzej J.L. Bell w swoim artykule (Bell, 1986), wspominając m.in. bardzo ciekawe przykłady znane z literatury (zob. Takeuti, 1978), kiedy to samo matematyczne pojęcie liczby rzeczywistej, przy zmianie lokalnej struktury interpretacji (którą są odpowiednie toposy z tzw. obiektem liczb naturalnych, stanowiące uogólnione modele teorii mnogości w ramach których należy interpretować matematyczne pojęcia), transformuje się dokładnie w pojęcie funkcji ciągłej, funkcji mierzalnej, czy wręcz operatora samosprzężonego (zob. Bell, 1986, s. 417n).

Spośród innych zastosowań TK w filozofii, można wskazać na jej związki z teorią mereologii. T. Mormann w swoim artykule (Mormann, 2009) argumentuje, że klasyczna boolowska mereologia wymaga modernizacji, jako że w ogólności systemy mereologiczne okazują się nie być boolowskie. Dzięki TK możliwe staje się uogólnienie klasycznej mereologii. Dodatkowo każda kategoria $\mathcal{C}$ posiada swoją własną $\mathcal{C}$-mereologię (zob. Mormann, 2009, s. 338)[33]. Związki TK z mereologią omawiane są także w pracach (Mormann, 2010; Bell, 2004).

Wspomnijmy na koniec o artykule (Peruzzi, 2006), w którym autor rozważa dość śmiały, choć jak się wydaje ważny, temat znaczenia teorii kategorii dla filozofii XXI wieku. Najpierw zauważa on, iż najważniejsze zagadnienia badane przez filozofów w XX w. były usytuowane w obszarach semantyki, epistemologii i filozofii umysłu, a następnie twierdzi, że ich filozoficzna analiza okazała się zależeć od narzędzi, których dostarczała matematyka (zob. s. 426). W kolejnych rozdziałach Peruzzi szeroko omawia m.in. znaczenie i możliwe zastosowania teorii kategorii w filozofii języka (pojęcie znaczenia), filozofii nauki (pojęcie teorii) i znacznie skromniej w filozofii umysłu. Dwa ostatnie rozdziały poświęcone są szerszemu spojrzeniu na kategoryjne podejście do „architektury" matematyki oraz związkom TK z podstawami i filozofią matematyki. Nie wchodząc tutaj w ważne szczegóły, widzimy w tej pracy cenny przykład badań nad możliwą rolą TK we wspomnianych istotnych obszarach filozofii.

[33] W przypadku kategorii które są toposami, krata $\mathcal{C}$-części obiektu X (tj. podobiektów obiektu X), o której pisze Mormann a która jest właśnie odpowiednią $\mathcal{C}$-mereologią w tym przypadku, jest (zapewne – Mormann nie podaje dokładnej definicji) tym samym, co krata podobiektów o której pisaliśmy w jednym z akapitów sekcji 7.

9. Zakończenie

Dla wielu filozofów, szczególnie w Polsce, sama teoria kategorii jak i jej stopniowo odkrywane znaczenie dla filozofii ciągle pozostają nieznane. Mamy jednak nadzieję, że niniejsza praca zachęci choć niektórych Czytelników do dalszych studiów, czemu też mają służyć dość liczne odniesienia do literatury. Powtórzmy raz jeszcze, że zarówno przedstawienie niektórych podstawowych pojęć i konstrukcji teorii kategorii, jak i kwestia jej związków z logiką, zostały omówione bardzo pobieżnie w stosunku do zakresu tych zagadnień. Zarysowaliśmy jedynie związek z logiką zdań, nie poruszając zupełnie kwestii logiki pierwszego rzędu czy wyższych, jak i niektórych podstawowych teorii, np. arytmetyki Peano. Nie wspomnieliśmy zupełnie m.in. o kotoposach (*cotoposes* lub *cotopoi*) i ich związku z logiką parakonsystentną (zob. np. Angot-Pellissier, 2015, a także Heller, 2016b). Poprzez dualność kotoposów do toposów dostaje się bardzo ciekawy wynik dualności logiki parakonsystentnej do logiki intuicjonistycznej. Listę zagadnień dotyczących samej TK, jak i jej związków z logiką, których nie poruszyliśmy w tej pracy można by jeszcze długo wymieniać. Zatrzymajmy się w tym miejscu, zostawiając te powyżej wspomniane jako możliwy plan dalszych studiów.

Warto jeszcze rozprawić się ze spotykanym czasami nieuzasadnionym traktowaniem na poważnie żartobliwej etykietki przyczepianej niekiedy teorii kategorii, mianowicie że jest ona „abstrakcyjnym nonsensem” (*abstract nonsense*). Sformułowanie to ukuł Steenrod (wspomina o tym np. McLarty w (McLarty, 1990, s. 355)), traktując je jednak humorystycznie. On sam wykorzystał teorię kategorii w ramach swoich prac nad aksjomatyką teorii homologii, a o słynnym, założycielskim dla teorii kategorii artykule (Eilenberg i Mac Lane, 1945) powiedział, że miał na niego większy wpływ niż jakakolwiek inna praca badawcza, gdyż zmienił jego sposób myślenia (zob. Mac Lane, 1988, s. 335). Mamy nadzieję, że niniejsza praca pokazała, że realnym nonsensem jest traktowanie teorii kategorii jako abstrakcyjnego nonsensu.

Na koniec (bazując na (Marquis, 2009, s. 1)) spróbujmy popatrzeć na teorię kategorii i jej znaczenie z nieco innej perspektywy. Wiele przełomowych dokonań w matematyce, które miały wpływ także na inne dziedziny nauki, wymagało znacznej ilości czasu i opracowania, zanim społeczność naukowa doceniła ich wyjątkową wartość. Dobrym przykładem może być sytuacja teorii grup. Wielu uważało początkowo, że jest ona zbyt abstrakcyjna. Jej przyswojenie i docenienie zajęło naukowcom prawie stulecie. Dziś już jednak nikt nie kwestionuje ogromnej wagi teorii grup zarówno w matematyce, jak i w fizyce czy chemii. Jaki będzie los teorii kategorii tego nikt nie wie. Nie ulega jednak wątpliwości, że jest to jedna z najogólniejszych, najbardziej abstrakcyjnych teorii matematycznych, która jest już dziś dosyć powszechnym narzędziem w rękach matematyków. Organizuje i unifikuje ona sporą część współczesnej matematyki, a także stosowana jest w logice, fizyce teoretycznej i teoretycznej informatyce. Być może jednak teoria kategorii, podobnie jak kiedyś o wiele uboższa teoria grup, nadal potrzebuje nieco czasu, aby dopiero ukazać swój pełny blask.

Podziękowania

Dziękuję ks. prof. Michałowi Hellerowi oraz dr. hab. Jerzemu Królowi za cenne konsultacje dotyczące niniejszej pracy. Dziękuję także anonimowym recenzentom tej pracy za cenne uwagi, w szczególności za informacje dotyczące literatury.

Dodatek I: Tworzenie nowych kategorii

Omówimy teraz kilka sposobów tworzenia nowych kategorii z już danych.

Podkategorie

Mówimy, że $\mathcal{C}$ jest *podkategorią* kategorii $\mathcal{D}$ (co oznaczamy przez $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$), jeśli $\mathsf{Ob}(\mathcal{C}) \subseteq \mathsf{Ob}(\mathcal{D})$ i $\mathsf{Arr}(\mathcal{C}) \subseteq \mathsf{Arr}(\mathcal{D})$ (oraz oczywiście jeśli $\mathcal{C}$ sama w sobie jest kategorią). Np. ograniczając się do obiektów będących jedynie skończonymi zbiorami (zachowując wszystkie strzałki pomiędzy tymi obiektami) otrzymamy nową kategorię Finset (por. ang. *finite sets*), zachodzi więc $\mathsf{Finset} \subseteq \mathsf{Set}$. Podkategorię nazywamy *pełną* (*full*) jeśli dla dowolnych obiektów A, B z podkategorii $\mathcal{C}$ zachodzi $\mathcal{C}(A, B) = \mathcal{D}(A, B)$. Oznacza to, że choć rodzina obiektów w podkategorii może być uboższa, to jednak w pełnej podkategorii pomiędzy tymi obiektami obecne są wszystkie strzałki z nadrzędnej kategorii. Przykładowo zauważmy, że kategoria Finset jest pełną podkategorią Set.

Iloczyn (produkt) kategorii

Rozważmy najpierw przykład kategorii Set^2, która powstaje na bazie kategorii Set. Jako obiekty ma ona pary $\langle A, B\rangle$ dowolnych zbiorów A i B. Strzałką w Set^2 idącą od $\langle A, B\rangle$ do $\langle C, D\rangle$ jest para funkcji (strzałek w Set) pomiędzy odpowiednimi obiektami, mianowicie

$\langle f, g\rangle$, gdzie $f : A \to C$, $g : B \to D$. Składanie strzałek jest zdefiniowane w naturalny sposób: $\langle f, g\rangle \circ \langle f', g'\rangle = \langle f \circ f', g \circ g'\rangle$. Strzałką identycznościową na $\langle A, B\rangle$ jest $\langle 1_A, 1_B\rangle$.

Powyższą konstrukcję możemy uogólnić na iloczyn dowolnych dwóch kategorii $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$. Nowa kategoria $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ ma jako obiekty pary $\langle A, B\rangle$, gdzie A jest $\mathcal{C}$-obiektem, a B jest $\mathcal{D}$-obiektem. Strzałkę $\langle A, B\rangle \to \langle C, D\rangle$ definiujemy jako parę $\langle f, g\rangle$ złożoną z $\mathcal{C}$-strzałki $f : A \to C$ oraz $\mathcal{D}$-strzałki $g : B \to D$. Składanie i identyczności uogólniają się analogicznie.

Kategoria strzałek (*arrow category*)

Ciekawym przykładem konstrukcji nowej kategorii jest użycie strzałek z danej kategorii jako obiektów nowej kategorii. Przyjrzyjmy się najpierw tej konstrukcji na przykładzie Set. Nową kategorię strzałek będziemy oznaczać $\mathsf{Set}^{\to}$. Jej obiektami są $\mathcal{C}$-strzałki, a więc funkcje $f : A \to B$. Strzałką w $\mathsf{Set}^{\to}$ idącą od obiektu $f : A \to B$ do $g : C \to D$ jest para funkcji $\langle h, i\rangle$ takich, że $g \circ h = i \circ f$, co równoważnie możemy przedstawić mówiąc, że następujący diagram

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & C \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ B & \xrightarrow{i} & D \end{array} \tag{6}$$

ma komutować (pojęcie diagramu i jego komutowania wyjaśniamy poniżej).

Składanie definiujemy poprzez $\langle j, k \rangle \circ \langle h, i \rangle = \langle j \circ h, k \circ i \rangle$, co można zobrazować przez diagram

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{h} & C & \xrightarrow{j} & E \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle l} \\ B & \xrightarrow{i} & D & \xrightarrow{k} & F \end{array}$$

Otrzymujemy w ten sposób $\mathsf{Set}^{\rightarrow}$-strzałkę idącą od $f : A \rightarrow B$, do $l : E \rightarrow F$.

Uogólnienie powyższej konstrukcji dla dowolnej kategorii $\mathcal{C}$ jest trywialne. Powstałą w ten sposób kategorię, której obiektami są $\mathcal{C}$-strzałki, oznaczamy $\mathcal{C}^{\rightarrow}$. Przykład ten jasno pokazuje, że o tym czy coś pełni w kategorii funkcję obiektu, czy strzałki nie decyduje jego wewnętrzna natura, lecz sama rola jaką pełni ono w danej kategorii.

Wyjaśnijmy w tym momencie nieco dokładniej pojęcie diagramu. *Diagramem* nazywamy graf skierowany, którego wierzchołki są obiektami kategorii, a krawędzie odpowiednimi strzałkami (używa się także bardziej kategoryjnej definicji diagramu jako odpowiedniego funktora, jednak pozostańmy przy tutejszej definicji). Mówimy, że diagram komutuje, jeśli składanie strzałek wzdłuż dowolnych ścieżek (zgodnych ze zwrotem strzałek, a więc umożliwiających ich składanie) idących od jakiegoś dowolnego wspólnego wierzchołka początkowego do (w ogólności) innego wspólnego wierzchołka końcowego, daje tę samą strzałkę. Komutowanie diagramu jest więc równoważne odpowiednim równaniom, które muszą spełniać morfizmy. Np. powyżej widzieliśmy, że komutowanie diagramu (6) równoważne było spełnianiu przez morfizmy równania $g \circ h = i \circ f$.

Kategoria dualna

Dla dowolnej kategorii $\mathcal{C}$ możemy utworzyć kategorię do niej dualną $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$, która ma tę samą rodzinę obiektów co kategoria $\mathcal{C}$, a jej rodzina strzałek powstaje przez odwrócenie zwrotów wszystkich strzałek pierwotnej kategorii (składanie strzałek trzeba odpowiednio przeformułować, aby uwzględnić przeciwną kolejność ich składania).

Dodatek II: Definicja koproduktu

Definicja 16. *Koproduktem* obiektów A i B nazywamy obiekt $A+B$ wraz z parą strzałek ($\iota_1 : A \to A+B$, $\iota_2 : B \to A+B$ zwanych także włożeniami) takie, że dla dowolnej pary strzałek $f : A \to C$ i $g : B \to C$ istnieje dokładnie jedna strzałka $[f,g] : A+B \to C$ czyniąca komutatywnym diagram

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[dr, bend right, "f"'] & A+B \arrow[d, dashed, "{[f,g]}"] & B \arrow[l, "\iota_2"'] \arrow[dl, bend left, "g"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

Bibliografia

Abramsky, S. i Coecke, B., 2008. Categorical quantum mechanics. arXiv: 0808.1023.

Angot-Pellissier, R., 2015. The Relation Between Logic, Set Theory and Topos Theory as it Is Used by Alain Badiou. W: Koslow, A. i Buchsbaum, A. red. *The Road to Universal Logic, vol. II*, *Studies in Universal Logic*. Birkhäuser, Springer, Cham, ss. 181–200.

Awodey, S., 1996. Structure in Mathematics and Logic: A Categorical Perspective. *Philosophia Mathematica*, 4(3), ss. 209–237.

Awodey, S., 2004. An Answer to Hellman's Question: „Does Category Theory Provide a Framework for Mathematical Structuralism?" *Philosophia Mathematica*, 12(1), ss. 54–64.

Awodey, S., 2010. *Category Theory*, *Oxford Logic Guides*. OUP Oxford.

Bell, J.L., 1981. Category Theory and the Foundations of Mathematics. *British Journal for the Philosophy of Science*, 32(4), ss. 349–358.

Bell, J.L., 1986. From Absolute to Local Mathematics. *Synthese*, 69(3), ss. 409–426.

Bell, J.L., 2004. Whole and Part in Mathematics. *Axiomathes*, 14(4), ss. 285–294. Dostępne na: https://doi.org/10.1023/B:AXIO.0000024887.61543.63.

Bell, J.L., 2008. *A Primer of Infinitesimal Analysis*. Cambridge University Press.

Bondecka-Krzykowska, I. i Murawski, R., 2008. Teoria kategorii we współczesnej filozofii matematyki. W: Heller, M., Mączka, J., Polak, P. i Szczerbińska-Polak, M. red. *Prawa przyrody*. Ośrodek Badań Interdyscyplinarnych – Polska Akademia Umiejętności – Uniwersytet Jagielloński – Biblos, ss. 95–109.

Dalen, D. van, 2002. Intuitionistic Logic. W: Gabbay, D. i Günthner, F. red. *Handbook of Philosophical Logic*. 2 wyd. T. 5. Dordrecht: Kluwer, ss. 1–114.

Döring, A. i Isham, C., 2011. „What is a Thing?": Topos Theory in the Foundations of Physics. W: Coecke, B. red. *New Structures for Physics*. T. 813, *Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag*, ss. 753–937. arXiv: 0803.0417 [quant-ph].

Dummett, M., 2000. *Elements of Intuitionism*, *Oxford Logic Guides*. Clarendon Press.

Eilenberg, S. i Mac Lane, S., 1942. Group extensions and homology. *Annals of Mathematics*, 43, ss. 757–831. Dostępne na: https://doi.org/10.2307/1968966.

Eilenberg, S. i Mac Lane, S., 1945. General theory of natural equivalences. *Transactions of the American Mathematical Society*, 58, ss. 231–294.

Goldblatt, R., 2006. *Topoi: The Categorial Analysis of Logic*, *Dover Books on Mathematics*. Dover Publications.

Grothendieck, A., 1957. Sur quelques points d'algèbre homologique. *Tohoku Mathematical Journal*, 9(2), ss. 119–221. Dostępne na: https://doi.org/10.2748/tmj/1178244839.

Heller, M., 2015. Category Theory and the Philosophy of Space. W: Murawski, R. red. *Filozofia matematyki i informatyki*. Copernicus Center Press, ss. 185–200.

Heller, M., 2016a. Category Free Category Theory and Its Philosophical Implications. *Logic and Logical Philosophy* [Online], 25(4), ss. 447–459. Dostępne na: https://doi.org/arXiv:1602.01759 [ostatni dostęp: marzec 2018].

Heller, M., 2016b. Teoria kategorii, logika i filozofia. *Filozofia Nauki*, 94, ss. 5–15.

Heller, M. i Król, J., 2017a. Beyond the Space-Time Boundary. arXiv: 1711.09027.

Heller, M. i Król, J., 2017b. Gravity in the smallest. arXiv: 1706.03541.

Heller, M. i Król, J., 2017c. Infinitesimal Structure of Singularities. *Universe*, 3, s. 16.

Hellman, G., 2006. What is Categorical Structuralism? W: Benthem, J. van, Heinzman, G., Rebushi, M. i Visser, H. red. *The Age of Alternative Logics*. Springer, ss. 151–161.

Heyting, A., 1971. *Intuitionism*. Amsterdam: North-Holland Pub. Co.

Isham, C.J. i Butterfield, J., 1999. Some Possible Roles for Topos Theory in Quantum Theory and Quantum Gravity. arXiv: gr-qc/9910005.

Kan, D.M., 1958. Adjoint Functors. *Transactions of the American Mathematical Society*, 87, ss. 294–329.

Kock, A., 2006. *Synthetic Differential Geometry*, *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press.

Król, Z., 2006. *Platonizm matematyczny i hermeneutyka*. Wydawn. IFiS PAN.

Król, Z., 2011. Platonizm w matematyce a platonizm w naukach matematyczno-przyrodniczych. W: Ługowski, W. i Lisiejew, I. red. *Filozofia przyrody dziś. Philosophy of Nature Today*. Wydawn. IFiS PAN, ss. 108–114.

Landry, E., 2018. *Categories for the Working Philosopher*. Oxford University Press.

Landry, E. i Marquis, J.P., 2005. Categories in Context: Historical, Foundational, and Philosophical. *Philosophia Mathematica*, 13(1), ss. 1–43.

Lawvere, F.W., 2005. An elementary theory of the category of sets (long version) with commentary. *Reprints in Theory and Applications of Categories* [Online], 11, ss. 1–35. Dostępne na: <http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/11/tr11.pdf> [ostatni dostęp: marzec 2018].

Lawvere, F.W. i Rosebrugh, R., 2003. *Sets for Mathematics*. Cambridge University Press.

Lawvere, F.W. i Schanuel, S.H., 1997. *Conceptual Mathematics: A First Introduction to Categories*. Cambridge University Press.

Leinster, T., 2014. *Basic Category Theory*, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press.

Mac Lane, S., 1988. Concepts and Categories in Perspective. W: Duren, P.L., Askey, R. i Merzbach, U.C. red. *A Century of Mathematics in America*. T. 1, *A Century of Mathematics in America*. American Mathematical Society, ss. 323–365.

Marquis, J.P., 2009. *From a Geometrical Point of View. A Study of the History and Philosophy of Category Theory*. Springer, Netherlands.

Marquis, J.P., 2015. Category Theory. W: Zalta, E.N. red. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* [Online]. zima 2015. Metaphysics Research Lab, Stanford University. Dostępne na: <https://plato.stanford.edu/archives/win2015/entries/category-theory/>.

McDonald, D., 2012. *Anti-Foundational Categorical Structuralism*. Praca doktorska. The School of Graduate i Postdoctoral Studies, The University of Western Ontario.

McLarty, C., 1990. The Uses and Abuses of the History of Topos Theory. *British Journal for the Philosophy of Science*, 41(3), ss. 351–375.

Moerdijk, I. i Reyes, G.E., 1991. *Models for Smooth Infinitesimal Analysis*. Springer-Verlag.

Mormann, T., 2009. Updating Classical Mereology. W: Glymour, C., Westerstahl, D. i Wang, W. red. *Logic, Methodology and Philosophy of Science. Proceedings of the 13th International Congress*. King's College.

Mormann, T., 2010. Structural Universals as Structural Parts: Toward a General Theory of Parthood and Composition. *Axiomathes*, 20(2-3), ss. 229–253.

Peruzzi, A., 2006. The Meaning of Category Theory for 21st Century Philosophy. *Axiomathes*, 16(4), ss. 424–459.

Rasiowa, H. i Sikorski, R., 1963. *The Mathematics of Metamathematics*, *Monografie Matematyczne*. Warszawa: Państwowe Wydawn. Naukowe.

Semadeni, Z. i Wiweger, A., 1972. *Wstęp do teorii kategorii i funktorów*, *Biblioteka matematyczna*. PWN.

Simmons, H., 2011. *An Introduction to Category Theory* [Online]. Cambridge University Press. Dostępne na: <http://www.cs.man.ac.uk/~hsimmons/zCATS.pdf> [ostatni dostęp: marzec 2018].

Skowron, B., 2015. Proteuszowy charakter matematyki w ujęciu Sandersa Mac Lane'a. W: Murawski, R. red. *Filozofia matematyki i informatyki*. Copernicus Center Press, ss. 201–217.

Smith, P., 2016. *Category Theory: A Gentle Introduction* [Online]. Skrypt, University of Cambridge. Dostępne na: <http://www.logicmatters.net/resources/pdfs/GentleIntro.pdf> [ostatni dostęp: marzec 2018].

Takeuti, G., 1978. *Two Applications of Logic to Mathematics*. Princeton University Press.

Troelstra, A.S. i Dalen, D. van, 1988. *Constructivism in Mathematics*. T. 1, 2, *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. Elsevier Science.

Zawadowski, M., 2012. *Elementy teorii kategorii* [Online]. Skrypt, Uniwersytet Warszawski. Dostępne na: <http://www.mimuw.edu.pl/~zawado/WTK/TK.pdf> [ostatni dostęp: marzec 2018].