Robert Kruszewski

Równowaga rynkowa i cykl koniunkturalny : model matematyczny

Studia i Prace Wydziału Nauk Ekonomicznych i Zarządzania 51/3, 197-211

2018

Artykuł został opracowany do udostępnienia w internecie przez Muzeum Historii Polski w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego. Artykuł jest umieszczony w kolekcji cyfrowej bazhum.muzhp.pl, gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach dozwolonego użytku.

MUZEUM HISTORII POLSKI

UNIWERSYTET SZCZECIŃSKI
WYDZIAŁ NAUK EKONOMICZNYCH I ZARZĄDZANIA

Studia i Prace WNEiZ US
nr 51/3 2018

DOI: 10.18276/sip.2018.51/3-16

Robert Kruszewski*
Szkoła Główna Handlowa w Warszawie
Kolegium Analiz Ekonomicznych

RÓWNOWAGA RYNKOWA I CYKL KONIUNKTURALNY. MODEL MATEMATYCZNY

STRESZCZENIE

Głównym celem opracowania jest zbadanie wpływu prostego mechanizmu oczekiwań na dynamikę modelu cyklu koniunkturalnego opartego na mnożniku i zasadzie akceleracji. Zmodyfikowana funkcja konsumpcji zależy od oczekiwanego poziomu produkcji (dochodu) w okresie bieżącym i jest nieliniowa. Zostaną opisane możliwe typy ścieżek czasowych oraz zbadany wpływ parametrów na dynamikę modelu.

Słowa kluczowe: cykl koniunkturalny, równowaga, chaos deterministyczny, bifurkacja

Wprowadzenie

Przedmiotem rozważań nad cyklami koniunkturalnymi jest analiza przyczyn występowania wahań w gospodarce. Teorie wyjaśniające zjawiska cykliczności tworzone były przez ekonomistów różnych epok. W artykule skupimy uwagę na teorii opartej na współdziałaniu mnożnika i akceleratora, która została opracowana w latach 40. XX wieku. W ostatnich dziesięcioleciach następował rozwój tej teorii,

* Adres e-mail: rkrusz@sgh.waw.pl

w którego wyniku powstało wiele nieliniowych modeli dynamicznych. Dominacja modeli nieliniowych jest wynikiem pojawienia się nowych metod badawczych nieliniowych układów dynamicznych, które stanowią matematyczną reprezentacją modeli ekonomicznych. Wspomniane narzędzia to teoria bifurkacji i teoria morfogenezy (zwana także teorią katastrof) oraz zdefiniowane w połowie lat 70. XX wieku przez Li oraz Yorke'a (1975) pojęcie chaosu deterministycznego. Zastosowanie teorii bifurkacji pozwoliło na rekonstrukcję wielu wcześniejszych idei cyklu koniunkturalnego. Opisanie zjawiska chaosu deterministycznego postawiło w innym świetle zagadnienie wyjaśniania zjawiska falowania zmiennych ekonomicznych i przygotowywania prognoz tychże zmiennych. Chaos deterministyczny, który może pojawić się już w bardzo prostych modelach makroekonomicznych (np. Keynesa, Hicksa, Samuelsona), przedstawia klasyczną teorię koniunktury oraz skuteczność i efektywność polityki społeczno-gospodarczej w nowym świetle.

Model Hicksa, na bazie którego będzie skonstruowany nowy model, ze względu na prostotę i deskryptywny charakter, stanowi dobrą pozycję wyjściową do badania różnych sposobów modelowania strumienia konsumpcji oraz wyjaśniania cech morfologicznych cyklów gospodarczych. Saura, Vazquez i Vegas (1998) badali model Hicksa z dolnym ograniczeniem na poziom inwestycji i górnym na wielkość produktu krajowego. Puu, Gardini i Sushko (2005) także badali model Hicksa z ograniczeniami, w którym dolne ograniczenie poziomu inwestycji zostało powiązane z całkowitym zasobem kapitału w modelowanej gospodarce. Matsumoto i Szidarovszky (2015) rozważali nieliniowy model mnożnika i akceleratora z opóźnionym argumentem funkcji inwestycji i konsumpcji. Analizie modelu Hicksa z nieliniową funkcją inwestycji poświęcona jest także praca Puu i Sushko (2004).

Celem niniejszej pracy jest skonstruowanie matematycznego modelu cyklu gospodarczego, zbadanie dynamiki tego modelu ze szczególnym uwzględnieniem atraktorów okresowych i quasi-okresowych, zidentyfikowanie czynników determinujących powstawanie tychże atraktorów oraz określenie warunków, jakie muszą zaistnieć, by wystąpiło zjawisko chaosu deterministycznego.

Do zbudowania i analizy nieliniowego modelu cyklu gospodarczego będą użyte narzędzia ekonomii matematycznej, w tym teoria nieliniowych układów dynamicznych z czasem dyskretnym i teoria bifurkacji. Realizacji postawionych celów podporządkowana jest struktura artykułu. Część pierwsza zawiera opis liniowego modelu Hicksa, którego równowaga stacjonarna będzie wykorzystana w części drugiej

zawierającej opis modelowania oczekiwań. Część trzecia zawiera założenia modelu nieliniowego oraz opisuje położenia równowagi i lokalne zjawiska bifurkacyjne zachodzące w badanym modelu. Część czwarta poświęcona jest analizie numerycznej zaproponowanego modelu, ze szczególnym uwzględnieniem atraktorów cyklicznych, quasi-okresowych i chaotycznych. Konkluzje zawarte są w ostatniej części.

1. Model Hicksa

Model Hicksa oparty jest na zasadzie współdziałania Keynesowskiego mnożnika i zasady akceleracji. Opisuje dynamikę produktu krajowego hipotetycznej gospodarki. Model ten będzie stanowić odniesienie do modelu nieliniowego, który zostanie przedstawiony w trzeciej części pracy.

W rozważanym liniowym modelu Hicksa zakłada się dodatnią konsumpcję autonomiczną $C_a > 0$, oraz że konsumpcja indukowana w okresie bieżącym jest wprost proporcjonalna do produktu krajowego z okresu poprzedniego Y_{t-1}. Strumień konsumpcji w okresie bieżącym C_t wyraża się wzorem:

$$C_t = C_a + (1-s)Y_{t-1}, \quad 0 < s < 1, \tag{1}$$

gdzie s reprezentuje skłonność do oszczędzania.

Inwestycje I_t są sumą stałych inwestycji autonomicznych $I_a = const$ i inwestycji indukowanych, które są proporcjonalne do zmiany poziomu produktu krajowego:

$$I_t = I_a + k(Y_{t-1} - Y_{t-2}), \quad k > 0, \tag{2}$$

gdzie k jest akceleratorem.

Produkt krajowy, w każdym okresie, przeznaczany jest na konsumpcję, inwestycje i wydatki rządowe $(G_t = G_a > 0)$, które są stałe w każdym okresie. Równanie bilansowe opisujące równowagę w modelowej gospodarce przyjmuje postać:

$$Y_t = C_t + I_t + G_t. \tag{3}$$

Matematycznym modelem opisującym dynamikę produktu krajowego opisanego zależnościami (1)-(3) jest niejednorodne równanie różnicowe liniowe drugiego rzędu o stałych współczynnikach i stałym wyrazie wolnym:

$$Y_t = I_a + C_a + G_a + (1-s+k)Y_{t-1} - kY_{t-2}. \tag{4}$$

Produkt krajowy w okresie bieżącym zależy od wydatków autonomicznych i wielkości produktu krajowego w dwóch poprzednich okresach. Powyższe równanie różnicowe ma jedną równowagę stacjonarną, która jest punktem stałym równania (4) i spełnia warunek $Y_t = Y_{t-1} = Y_{t-2} = \bar{Y}$, gdzie $\bar{Y} = \frac{1}{s}\left(I_a + C_a + G_a\right)$. Równowaga ta jest asymptotycznie stabilna dla wartości akceleratora mniejszych od jedności.

Możliwe typy ścieżek czasowych w przedstawionym modelu to: zbieżność do równowagi (monotoniczna lub z gasnącymi oscylacjami), cykliczne wahania (o stałej amplitudzie) wokół równowagi i oscylacje o rosnącej amplitudzie. W odpowiedzi na powyższe ograniczenia (uboga dynamika, trywialny atraktor punktowy) nieliniowa wersja modelu będzie przedstawiona w trzeciej części pracy. Zmianie ulegnie sposób modelowania zarówno strumienia konsumpcji, jak i strumienia inwestycji indukowanych. W miejsce liniowych zależności będą wprowadzone relacje nieliniowe i uwzględnione oczekiwania co do wielkości produktu krajowego w sposobie modelowania strumienia konsumpcji.

2. Oczekiwania

Gospodarstwa domowe są częściowo racjonalne, tzn. ze względu na niewystarczającą informację i możliwości analityczne nie są w stanie podejmować optymalnych decyzji. W zastępstwie stosują proste heurystyki, które sprawdziły się w przeszłości. Zakładam, że gospodarstwa domowe do prognozowania wartości zmiennych ekonomicznych (tu: produktu krajowego) stosują średnią ważoną dwóch typów oczekiwań. Pierwszy typ to oczekiwania ekstrapolacyjne, a drugi – odwrócone oczekiwania ekstrapolacyjne.

Zagregowane oczekiwania wielkości produkcji w okresie t powstają na koniec okresu poprzedniego, tj. okresu $t-1$ i są średnią ważoną oczekiwań ekstrapolacyjnych $\left(E^1_{t-1}[Y_t]\right)$ i odwróconych oczekiwań ekstrapolacyjnych $\left(E^2_{t-1}[Y_t]\right)$.

Oczekiwania powstają w odniesieniu do długookresowej równowagi w modelu liniowym $\bar{Y} = \frac{1}{s}\left(I_a + C_a + G_a\right)$, która jest punktem stałym równania (4). Oczekiwania pierwszego typu wyrażają się równością:

$$E^1_{t-1}[Y_t] = Y_{t-1} + \mu_1\left(Y_{t-1} - \bar{Y}\right), \ \mu_1 > 0. \tag{5}$$

Oczekiwania drugiego typu opisane są regułą:

$$E_{t-1}^{2}[Y_t] = Y_{t-1} + \mu_2\left(\bar{Y} - Y_{t-1}\right),\ 0 < \mu_2 < 1. \tag{6}$$

Zakładam, podobnie jak Lines i Wasterhoff (2006), że większe odchylenia produktu krajowego powodują zmniejszenie wagi związanej z oczekiwaniami ekstrapolacyjnymi. Gospodarstwa domowe odbierają sytuacje skrajne (duże odchylenia od równowagi $\bar{Y}$) jako niestabilne. Reguła opisująca zmienność wagi dla oczekiwań ekstrapolacyjnych przyjmuje postać:

$$w_t = \frac{1}{1 + \left(\gamma \frac{Y_{t-1} - \bar{Y}}{\bar{Y}}\right)^2},\ \gamma > 0. \tag{7}$$

Równanie opisujące zagregowane oczekiwania co do wielkości produktu krajowego przyjmuje postać:

$$E_{t-1}[Y_t] = w_t E_{t-1}^{1}[Y_t] + (1 - w_t) E_{t-1}^{2}[Y_t],\ 0 < w_t \le 1. \tag{8}$$

3. Model nieliniowy

W większości wersji modelu Hicksa strumień konsumpcji jest liniową funkcją produktu krajowego z okresu poprzedniego. Część badaczy w modelowaniu strumienia konsumpcji uwzględnia jego zależność od poziomu produktu krajowego z kilku poprzednich okresów (Puu, 2003). Oddzielną klasę stanowią modele, w których opis strumienia konsumpcji oparty jest na oczekiwanej wielkości produktu krajowego w okresie bieżącym. Przedstawiony poniżej model cyklu gospodarczego stanowi nawiązanie do propozycji zawartej w pracach Kruszewski (2009, 2011).

W konstruowanym nieliniowym modelu cyklu gospodarczego bazującym na modelu Hicksa konsumpcja w okresie bieżącym będzie zależeć od oczekiwanego poziomu produktu krajowego w tym okresie. Oczekiwania są formowane na koniec poprzedniego okresu. Równanie opisujące strumień konsumpcji przyjmuje postać:

$$C_t = C_a + (1 - s) E_{t-1}[Y_t],\ 0 < s < 1, \tag{9}$$

gdzie $C_a > 0$ oznacza konsumpcję autonomiczną, a $0 < s < 1$ oznacza skłonność do oszczędzania.

Funkcja inwestycji w bazowym modelu Hicksa jest funkcją liniową zależną od różnicy produktu krajowego w okresach t-1 i t-2. Ten sposób modelowania strumienia inwestycji jest dość odległy od rzeczywistych procesów inwestycyjnych, co zauważył już Hicks (1950), który proponował zastąpienie funkcji liniowej funkcją przedziałami liniową. Wiązało się to z wprowadzeniem górnego i dolnego ograniczenia strumienia inwestycji. Udoskonalenia sposobu modelowania strumienia inwestycji przedstawił także Goodwin (1951). Idea Goodwina przekłada się na zastosowanie funkcji arcustangens do modelowania strumienia inwestycji. Puu (2003) w modelowaniu strumienia inwestycji uwzględnia także inwestycje rządowe i cały proces opisuje za pomocą wielomianu trzeciego stopnia:

$$I_t = k(Y_{t-1} - Y_{t-2}) - k(Y_{t-1} - Y_{t-2})^3, k > 0. \tag{10}$$

W niniejszej pracy, podobnie jak w Kruszewski (2016), będą uwzględnione dodatkowo inwestycje autonomiczne $I_a > 0$, zatem

$$I_t = I_a + k(Y_{t-1} - Y_{t-2}) - k(Y_{t-1} - Y_{t-2})^3, k > 0. \tag{11}$$

Podstawiając równania (9) i (10) do równania bilansowego

$$Y_t = C_t + I_t + G_t \tag{12}$$

oraz zakładając stałość wydatków rządowych $G_t = G_a = const > 0$, otrzymujemy autonomiczne równanie różnicowe nieliniowe drugiego rzędu:

$$Y_t = (1-s)E_{t-1}[Y_t] + k(Y_{t-1} - Y_{t-2}) - k(Y_{t-1} - Y_{t-2})^3 + I_a + C_a + G_a, \tag{13}$$

które jest równoważne następującemu autonomicznemu układowi dwóch równań różnicowych pierwszego rzędu:

$$\begin{cases} Y_t = (1-s)E_{t-1}[Y_t] + v(Y_{t-1} - Z_{t-1}) - v(Y_{t-1} - Z_{t-1})^3 + I_a + C_a + G_a \\ Z_t = Y_{t-1} \end{cases} \tag{14}$$

Do analizy układu (14) zostaną użyte narzędzia jakościowej teorii nieliniowych równań różnicowych.

Niech $F: R^2 \to R^2$ będzie odwzorowaniem oznaczającym prawą stronę układu (6):

$$F(y,z) = \begin{cases} (1-s)E_{t-1}[y] + v(y-z) - v(y-z)^3 + I_a + C_a + G_a \\ y \end{cases} \tag{15}$$

Pierwszym elementem jakościowej analizy układu (14) jest wyznaczenie położenia równowagi (rozwiązania stacjonarnego). Równowaga układu (14) jest punktem stałym odwzorowania F. Punkt stały $\left(y^*, z^*\right)$ odwzorowania F spełniają warunek:

$$F\left(y^*, z^*\right) = \left(y^*, z^*\right), \tag{16}$$

Twierdzenie 1

Gospodarka opisana układem równań (14) ma jedną równowagę stacjonarna $E_1\left(Y_1^*, Z_1^*\right)$, gdzie $Y_1^* = Z_1^* = \frac{I_a + g}{s}$ dla $s > \frac{\mu_1}{1+\mu_1}$ i trzy równowagi długookresowe $E_1\left(Y_1^*, Z_1^*\right)$, $E_2\left(Y_2^*, Z_2^*\right)$, $E_3\left(Y_3^*, Z_3^*\right)$ dla $0 < s < \frac{\mu_1}{1+\mu_1}$, takie, że $Z_2^* = Y_2^* < Y_1^* < Y_3^* = Z_3^*$.

Dowód:

Punkty stałe układu (14) spełniają układ równań

$$\begin{cases} Y_t = Y_{t-1} = Y^* \\ Z_t = Z_{t-1} = Z^* \end{cases}, \tag{17}$$

który jest równoważny równaniom

$$Y^* - \bar{Y} = \left(Y^* - \bar{Y}\right)\frac{1-s}{s}\left(w^*(\mu_1 + \mu_2) - \mu_2\right), \tag{18}$$

$$Z^* = Y^* \tag{19}$$

gdzie

$$w^* = \frac{\bar{Y}^2}{\bar{Y}^2 + \gamma^2\left(Y^* - \bar{Y}\right)^2} \tag{20}$$

jest wagą równowagi długookresowej. $Y_1^* = \bar{Y}$ jest pierwiastkiem równania (18), dla wszystkich wartości parametrów. Zatem punkt $E_1\left(Y_1^*, Z_1^*\right)$ taki, że $Z_1^* = Y_1^* = \bar{Y} = \frac{1}{s}(I_a + C_a + G_a)$ jest punktem stałym układu (14). Podstawiając zależność (20) do równania (18), otrzymujemy

$$\left(Y^* - \bar{Y}\right)^2 = \frac{\bar{Y}^2\left((1-s)\mu_1 - s\right)}{\gamma^2\left(s + \mu_2(1-s)\right)}. \tag{21}$$

Mianownik prawej strony równania (21) jest zawsze dodatni $(0 < s, \mu_2 < 1)$. Równanie (21) dla $0 < s < \frac{\mu_1}{1+\mu_1}$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste $Y_2^* = \bar{Y} - \frac{\bar{Y}}{\gamma}\sqrt{\frac{(1\text{-s})\mu_1 - s}{s+\mu_2(1-s)}}$ oraz $Y_3^* = \bar{Y} + \frac{\bar{Y}}{\gamma}\sqrt{\frac{(1\text{-s})\mu_1 - s}{s+\mu_2(1-s)}}$ spełniające nierówność $Y_2^* < \bar{Y} < Y_3^*$. Zatem układ dynamiczny (14) ma jedną równowagę $E_1(Y_1^*, Z_1^*)$ dla $s > \frac{\mu_1}{1+\mu_1}$ i trzy równowagi $E_1(Y_1^*, Z_1^*)$, $E_2(Y_2^*, Z_2^*)$, $E_3(Y_3^*, Z_3^*)$ dla $0 < s < \frac{\mu_1}{1+\mu_1}$ takie, że $Z_2^* = Y_2^* < Y_1^* < Y_3^* = Z_3^*$.■

Kolejnym etapem analizy jakościowej badanego modelu będzie ustalenie warunków, jakie muszą spełniać zmienne egzogeniczne, by stany stacjonarne były lokalnie asymptotycznie stabilne.

Stabilność równowagi stacjonarnej układu (14) zależy od wartości własnych macierzy Jakobiego odwzorowania *F*, która przyjmuje postać:

$$J(y,z) = \begin{bmatrix} (1-s)\frac{dE_{t-1}[y]}{dy} + k - 3k(y-z)^2 & -k + 3k(y-z)^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{22}$$

Równowaga E_1 będzie lokalnie asymptotycznie stabilna, gdy wszystkie wartości własne macierzy Jacobiego,

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} (1-s)(1+\mu_1) + k & -k \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

co do modułu, będą mniejsze od jedności. Warunki te będą spełnione (Medio, Lines, 2001) wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\begin{gathered} 1 + Tr\,J(E_1) + Det\,J(E_1) > 0 \\ 1 - Tr\,J(E_1) + Det\,J(E_1) > 0 \\ 1 - Det\,J(E_1) > 0 \end{gathered} \tag{23}$$

gdzie $Tr\,J(E_1) = (1-s)(1+\mu_1) + k$, $\det J(E_1) = k$.

Twierdzenie 2

Równowaga E_1 układu dynamicznego (13) jest lokalnie asymptotycznie stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{\mu_1}{1+\mu_1} < s < 1$ oraz $0 < k < 1$.

Dowód:

Pierwszy warunek jest zawsze spełniony, gdyż ślad i wyznacznik macierzy Jakobiego są zawsze dodatnie. Zatem obszar zmienności parametrów modelu, dla których równowaga E_1 jest lokalnie asymptotycznie zadany jest przez warunki (ii) oraz (iii), które redukują się do następujących dwóch nierówności: $\frac{\mu_1}{1+\mu_1} < s < 1$ oraz $0 < k < 1$.■

Ponieważ

$$\frac{dE_{t-1}[y]}{dy} = \frac{(\mu_1+\mu_2)}{1+\left(\gamma\frac{y-\bar{Y}}{\bar{Y}}\right)^2}\left[1-\frac{2\left(\gamma\frac{y-\bar{Y}}{\bar{Y}}\right)^2}{1+\left(\gamma\frac{y-\bar{Y}}{\bar{Y}}\right)^2}\right]+1-\mu_2,$$

zatem

$$\left.\frac{dE_{t-1}[y]}{dy}\right|_{y=Y_2^*} = \left.\frac{dE_{t-1}[y]}{dy}\right|_{y=Y_3^*}$$

i wówczas macierze Jacobiego dla położeń równowagi E_2 i E_3 są sobie równe.

$$J(E_2) = J(E_3) = \begin{bmatrix} (1-s)\left.\frac{dE_{t-1}[y]}{dy}\right|_{y=Y_2^*,Y_3^*} + k & -k \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ponownie położenia równowagi E_2 i E_3 są lokalnie asymptotycznie stabilne wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$1 + Tr\,J(E_{2,3}) + Det\,J(E_{2,3}) > 0$$

$$1 - Tr\,J(E_{2,3}) + Det\,J(E_{2,3}) > 0$$

$$1 - Det\,J(E_{2,3}) > 0$$

Wyznacznik i ślad macierzy $J\left(E_{2,3}\right)$ są równe odpowiednio:

$$Det\,J(E_{2,3}) = k\ ,$$

$$Tr\,J\left(E_{2,3}\right) = \left(s + \mu_2(1-s)\right)\left[1 - 2\frac{(1-s)\mu_1 - s}{(1-s)(\mu_1+\mu_2)}\right] + (1-s)(1-\mu_2) + k\ .$$

Twierdzenie 3

Równowagi E_2 i E_3 układu dynamicznego (11) są lokalnie asymptotycznie stabilne wtedy i tylko wtedy, gdy $0 < s < \frac{\mu_1}{1+\mu_1}$, $0 < k < 1$.

Dowód:

Warunek $0 < s < \frac{\mu_1}{1+\mu_1}$ gwarantuje istnienie położeń równowagi E_2 i E_3. Spełnienie trzeciego warunku jest równoważne nierówności $0 < k < 1$. Pierwszy warunek jest spełniony, gdyż $1 + Tr\,J(E_{2,3}) > 0$ oraz $0 < k < 1$. Drugi warunek jest równoważny nierówności:

$$1 - \left(s + \mu_2(1-s)\right)\left[1 - 2\frac{(1-s)\mu_1 - s}{(1-s)(\mu_1+\mu_2)}\right] + (1-s)(1-\mu_2) > 0\ ,$$

która jest zawsze spełniona, o ile $0 < s < \frac{\mu_1}{1+\mu_1}$.■

4. Bifurkacje i dynamika globalna

Jedną z charakterystycznych własności nieliniowych układów dynamicznych z czasem dyskretnym jest duża różnorodność możliwych scenariuszy opisujących dynamiczne własności rozwiązań. Rozwiązania mogą zbiegać do równowagi stacjonarnej, rozwiązania okresowego, quasi-okresowego lub zachowywać się chaotycznie. Modele chaotyczne są wrażliwe na małe zmiany warunku początkowego, który w modelowaniu ekonomicznym oznacza pozycję wyjściową gospodarki. Własność ta ogranicza zakres prognozy badanej zmiennej ekonomicznej i ukazuje istotność badania dynamiki nieliniowych modeli ekonomicznych pod kątem występowania zjawiska chaosu deterministycznego.

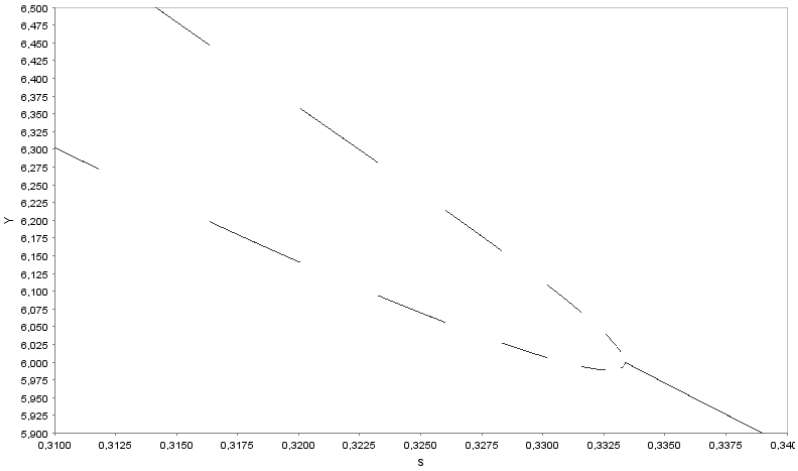
By w badanym modelu mogły zaistnieć atraktory okresowe, quasi-okresowe i chaotyczne, konieczne jest przekroczenie granicy obszaru lokalnej asymptotycznej

stabilności stanów stacjonarnych, wyznaczonych w części trzeciej niniejszej pracy. Przekraczanie obszaru lokalnej asymptotycznej stabilności wiąże się z występowaniem zjawiska bifurkacji.

W badanym modelu występują dwa typy bifurkacji lokalnych: bifurkacja widelcowa (ang. *pitchfork bifurcation*) i bifurkacja Neimarka-Sackera. W wyniku bifurkacji Neimarka-Sackera w układzie dynamicznym pojawiają się orbity okresowe lub quasi-okresowe. W wyniku bifurkacji widelcowej w badanym modelu zmienia się liczba równowag stacjonarnych. Stabilna równowaga stacjonarna przy przekraczaniu punktu bifurkacji ulega rozszczepieniu na dwa stabilne położenia równowagi. Scenariusz bifurkacji widelcowej może przebiegać w odwrotnym kierunku, dwa stabilne położenia równowagi wraz ze zwiększaniem wybranej zmiennej egzogenicznej zbliżają się do siebie i łączą w punkcie bifurkacji. W tym scenariuszu po przekroczeniu punktu bifurkacji w układzie dynamicznym pojawia jedna równowaga stacjonarna. Warunkiem koniecznym do wystąpienia bifurkacji widelcowej jest naruszenie drugiej nierówności w warunku (23). Naruszenie trzeciej nierówności w warunku (23) jest konieczne do zaistnienia bifurkacji Neimarka-Sackera. Wówczas macierz linearyzacji ma parę zespolonych sprzężonych wartości własnych, których moduł jest równy jedności. W badanym modelu utrata stabilności przez równowagę stacjonarną, w wyniku bifurkacji Neimarka-Sackera, prowadzi do powstania atraktorów quasi-okresowych lub okresowych.

Na rysunku 1 przedstawiono dynamikę hipotetycznej gospodarki jako funkcję skłonności do oszczędzania. Przyjęta do symulacji numerycznych wartość akceleratora gwarantuje stabilność stacjonarnych położeń równowagi. Rosnąca wartość parametru s, prowadzi do bifurkacji widelcowej, której przebieg redukuje liczbę stabilnych stanów stacjonarnych. Dla niskich wartości parametru s, gdy występują dwa stabilne położenia równowagi, czynnikiem determinującym zbieżność do równowagi o niskim bądź wysokim poziomie produktu krajowego jest pozycja wyjściowa gospodarki.

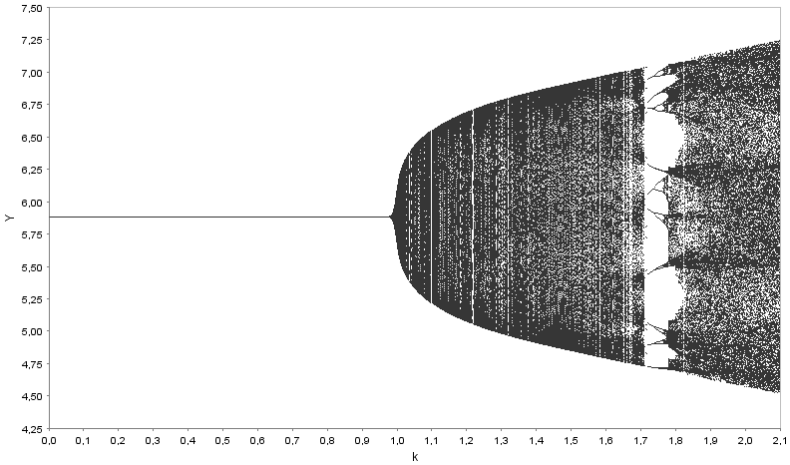
Rysunek 1. Diagram bifurkacyjny: $k = 0.98$, $\mu_1 = \mu_2 = 0.5$, $\gamma = 10$, $I_a + G_a + C_a = 2$



Źródło: obliczenia własne.

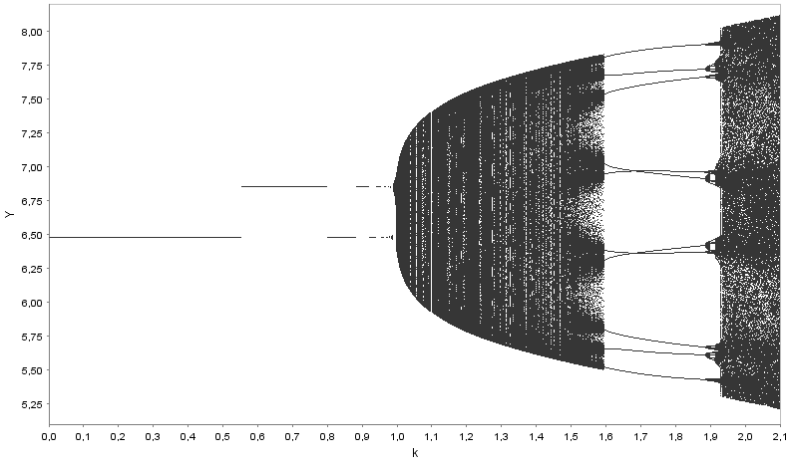
Długookresowe własności badanego modelu ze względu na wartości akceleratora zostały przedstawione na rysunku 2 i 3. Przedstawione diagramy bifurkacyjne zostały wygenerowane dla dwóch różnych wartości skłonności do oszczędzania, na rysunku 2 przed wystąpieniem bifurkacji widelcowej, a na rysunku 3 po zajściu bifurkacji widelcowej. W obydwu przypadkach wzrastająca wartość akceleratora prowadzi do destabilizacji położenia lub położeń równowagi. Utrata stabilności w tym przypadku wiąże się z występowaniem bifurkacji Neimarka-Sackera i w badanym modelu pojawiają się atraktory quasi-okresowe. Dalszy wzrost wartości akceleratora ujawnia istnienie atraktorów cyklicznych. W wyniku kaskady podwojenia okresu przy dalszym wzroście akceleratora w badanym układzie występuje zjawisko chaosu deterministycznego

Rysunek 2. Diagram bifurkacyjny: $s = 0.34$, $\mu_1 = \mu_2 = 0.5$, $\gamma = 10$, $I_a + G_a + C_a =$



Źródło: obliczenia własne.

Rysunek 3. Diagram bifurkacyjny: $s = 0.3$, $\mu_1 = \mu_2 = 0.5$, $\gamma = 10$, $I_a + G_a + C_a = 2$



Źródło: obliczenia własne.

Podsumowanie

Zaproponowany nieliniowy model cyklu gospodarczego obrazujący współdziałanie mnożnika i akceleratora jest przykładem modelu cyklu koniunkturalnego opartego na połączonym działaniu efektu mnożnikowego i zasady akceleracji. Modelowanie strumienia konsumpcji uwzględnia oczekiwania dotyczące poziomu produkcji w okresie bieżącym. Równania opisujące dynamikę modelowanej gospodarki w modelu liniowym są proste i zrozumiałe. Stanowi on znakomitą bazę do zbadania wpływu zagregowanych oczekiwań co do wielkości produktu krajowego formowanych przez gospodarstwa domowe. Dynamika modelu nieliniowego jest bardziej złożona, występuje zjawisko dwustabilności oraz zjawisko chaosu deterministycznego. Równowaga występująca w modelu liniowym jest także stanem stacjonarnym modelu nieliniowego. Utrata lokalnej stabilności przez równowagę w modelu nieliniowym nie oznacza niestabilności modelu. Pojawiają się atraktory okresowe, quasi-okresowe oraz chaotyczne, które są matematycznym modelem endogenicznego cyklu koniunkturalnego.

Literatura

Gallegati, M., Gardini, L., Puu, T., Sushko, I. (2003). Hicks' trade cycle revisited: cycles and bifurcations. *Mathematics and Computers in Simulation*, *63*, 505–527.

Goodwin, R.M. (1951). The nonlinear accelerator and the persistence of business cycles. *Econometrica*, *19*, 1–17.

Hicks, J.R. (1950). *A contribution to the theory of the trade cycle*. Oxford: Oxford University Press.

Kruszewski, R. (2009). Wielostabilność w nieliniowym modelu Hicksa z oczekiwaniami. W: T. Bernat (red.), *Teoretyczne i praktyczne aspekty funkcjonowania gospodarki.* Szczecin: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego.

Kruszewski, R. (2011). Expectations and the multiplier-accelerator model with investment floor and income ceiling. W: D. Kopycińska (red.), *Selected problems of market economy in the crisis era.* Szczecin: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego.

Kruszewski, R. (2016). Atraktory okresowe, quasi-okresowe i chaotyczne w nieliniowym modelu Hicksa. *Studia i Prace WNEiZ US*, *2* (44), 191–208.

Li, T.Y., Yorke, J.A. (1975). Period Three Implies Chaos. *American Mathematical Monthly*, *82*, 985–992.

Lorenz, H.W. (1992). Multiple attractors, complex basin boundaries, and transient motion in deterministic economic systems. W: G. Feichtinger (red.), *Dynamic economic models and optimal control* (s. 411–430). Amsterdam: North-Holland.

Manfredia, P., Fantib, L. (2004). Cycles in dynamic economic modeling. *Economic Modelling*, *21*, 573–594.

Matsumoto, A., Szidarovszky, F. (2015). Nonlinear multiplier-accelerator model with investment andconsumption delays. *Structural Change and Economic Dynamics*, *33*, 1–9.

Medio, A., Lines, M. (2001). *Economic Dynamics. A Primer*. Cambridge: Cambridge University Press.

Puu, T. (2003). *Attractors, bifuracations, & chaos*. Berlin–Heilderberg–New York: Springer.

Puu, T., Gardini, L., Sushko, I. (2005). A Hicksian multiplier-accelerator model with floor determined by capital stock. *Journal of Economic Behavior & Organization*, *56*, 331–348.

Puu, T., Sushko I. (2004). A business cycle model with cubic nonlinearity. *Chaos, Solitons and Fractals*, *19*, 597–612.

Saura, D., Vazquez, F.J., Vegas, J.M. (1998). Non-chaotic oscillations in some regularized Hicks models. A restatement of the ceiling and floor conditions. *Journal of Economic Dynamics and Control*, *22*, 661–678.

EQUILIBRIUM AND BUSINESS CYCLE. MATHEMATICAL MODEL

Abstract

We investigate the dynamics of the proposed nonlinear business cycle model with expectations. The possible long-term behaviour of the national income has been described. We investigate, how the dynamics of the model depend on parameters.

Keywords: business cycle, equilibrium, chaos, bifurcation, attractor

JEL codes: C02, C62, E32