Robert Kruszewski

Dynamika nieliniowego modelu cyklu gospodarczego

Studia i Prace Wydziału Nauk Ekonomicznych i Zarządzania 50/2, 113-130

2017

Artykuł został opracowany do udostępnienia w internecie przez Muzeum Historii Polski w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego. Artykuł jest umieszczony w kolekcji cyfrowej bazhum.muzhp.pl, gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach dozwolonego użytku.

MUZEUM HISTORII POLSKI

UNIWERSYTET SZCZECIŃSKI
WYDZIAŁ NAUK EKONOMICZNYCH I ZARZĄDZANIA

Studia i Prace WNEIZ US
nr 50/2 2017

STUDIA I MATERIAŁY

DOI: 10.18276/sip.2017.50/2-09

Robert Kruszewski*
Szkoła Główna Handlowa w Warszawie

DYNAMIKA NIELINIOWEGO MODELU CYKLU GOSPODARCZEGO

STRESZCZENIE

W artykule skonstruowano nieliniowy model cyklu gospodarczego, uwzględniający nieliniową funkcję inwestycji i konsumpcji. Opisano możliwe typy ścieżek czasowych oraz zbadano wpływ parametrów na dynamikę modelu.

Słowa kluczowe: cykl koniunkturalny, równowaga, chaos deterministyczny, bifurkacja

Wprowadzenie

W teorii ekonomii modele z czasem dyskretnym są coraz częściej stosowane. Ze względu na różnorodność dynamiki, która je charakteryzuje, szczególnym zainteresowaniem cieszą się modele nieliniowe. Rozwiązaniami takich układów dynamicznych mogą być ścieżki czasowe monotonicznie zbieżne do równowagi stacjonarnej, okresowe, quasi-okresowe, aż do rozwiązań, które swym przebiegiem przypominają procesy losowe. Ostatnia własność zwana chaosem deterministycznym rejestrowana jest już w jednowymiarowych nieliniowych modelach dyskretnych. Od początku lat osiemdziesiątych dwudziestego wieku obserwujemy wzrost zainteresowania nieliniowymi modelami dyskretnymi charakteryzującymi się złożoną (quasi-

* Adres e-mail: rkrusz@sgh.waw.pl

-okresową, chaotyczną) dynamiką. Chaos deterministyczny, który może pojawić się już w bardzo prostych modelach makroekonomicznych (np. J.M. Keynesa, J.R. Hicksa, P.A. Samuelsona), przedstawia klasyczną teorię koniunktury oraz skuteczność i efektywność polityki społeczno-gospodarczej w nowym świetle. Badanie okresowej, quasi-okresowej i chaotycznej dynamiki modeli cyklu koniunkturalnego, od lat osiemdziesiątych XX wieku stanowi jeden z głównych nurtów ekonomii matematycznej.

Model Hicksa, na bazie którego skonstruowany będzie nowy model, ze względu na swą prostotę i deskryptywny charakter stanowi dobrą pozycję wyjściową do badania różnych sposobów modelowania strumienia konsumpcji i inwestycji oraz wyjaśniania cech morfologicznych cyklów gospodarczych. Hommes, Saura, Vazquez i Vegas (1998) badali model Hicksa z dolnym ograniczeniem na poziom inwestycji i górnym na wielkość produktu krajowego. Puu, Gardini i Sushko (2005) także badali model Hicksa z ograniczeniami, w którym dolne ograniczenie poziomu inwestycji zostało powiązane z całkowitym zasobem kapitału w modelowanej gospodarce. Matsumoto i Szidarovszky (2015) rozważali nieliniowy model mnożnika i akceleratora z opóźnionym argumentem funkcji inwestycji i konsumpcji. Analizie modelu Hicksa z nieliniową funkcją inwestycji poświęcona jest także praca Puu i Sushko (2004).

Celem niniejszej pracy jest skonstruowanie matematycznego modelu cyklu gospodarczego opartego na modelu Hicksa, zbadanie dynamiki tego modelu ze szczególnym uwzględnieniem atraktorów okresowych i quasi-okresowych, zidentyfikowanie czynników determinujących powstawanie tychże atraktorów oraz określenie warunków, jakie muszą zaistnieć, by wystąpiło zjawisko chaosu deterministycznego. Istotnym elementem analizy będzie sprawdzenie, czy zaproponowany model jest w stanie generować ścieżki czasowe produktu krajowego, posiadające cechy morfologiczne rzeczywistych cykli gospodarczych.

Do zbudowania i analizy nieliniowego modelu cyklu gospodarczego użyte będą narzędzia ekonomii matematycznej, w tym teoria nieliniowych układów dynamicznych z czasem dyskretnym i teoria bifurkacji. Realizacji postawionych celów podporządkowana jest struktura artykułu. Część pierwsza zawiera założenia modelu oraz opisuje położenia równowagi i lokalne zjawiska bifurkacyjne zachodzące w badanym modelu. Część druga poświęcona jest analizie numerycznej zaproponowanego modelu, ze szczególnym uwzględnieniem atraktorów cyklicznych, quasi-okresowych i chaotycznych. Konkluzje zawarte są w ostatniej części.

1. Nieliniowy model cyklu gospodarczego

W większości wersji modelu Hicksa strumień konsumpcji jest liniową funkcją produktu krajowego z okresu poprzedniego. Część badaczy w modelowaniu strumienia konsumpcji uwzględnia jego zależność od poziomu produktu krajowego z kilku poprzednich okresów (Puu, 2003). Oddzielną klasę stanowią modele, w których opis strumienia konsumpcji oparty jest na oczekiwanej wielkości produktu krajowego w okresie bieżącym. Przedstawiony poniżej model cyklu gospodarczego stanowi rozszerzenie propozycji zawartej w pracy Kruszewskiego (2016).

W konstruowanym nieliniowym modelu cyklu gospodarczego, bazującym na modelu Hicksa, funkcja konsumpcji przyjmuje postać:

$$C_t = C_0 + (1-s)Y_{t-1}^{\alpha} + sY_{t-2},\ 0 < s < 1, \tag{1}$$

gdzie $C_0 > 0$ oznacza konsumpcję autonomiczną, a $0 < s < 1$ oznacza skłonność do oszczędzania. Parametr $\alpha > 0$ przyjmuje wartości bliskie jedności. Przyjęta postać funkcji konsumpcji pozwala badać własności modelu, w przypadku gdy faktyczne zachowania konsumpcyjne różnią się od przyjętych założeń teoretycznych, związanych z liniową zależnością od poziomu produktu krajowego w okresie t–1. Dodatkowo, w proponowanym mechanizmie modelowania strumienia konsumpcji, założono, iż oszczędności poczynione w okresie t–2 są wykorzystywane w okresie t–1 i podlegają konsumpcji w okresie bieżącym t.

Funkcja inwestycji w bazowym modelu Hicksa jest funkcją liniową zależną od różnicy produktu krajowego w okresach t–1 i t–2. Ten sposób modelowania strumienia inwestycji jest dość odległy od rzeczywistych procesów inwestycyjnych, co zauważył już Hicks (1950). Proponował on zastąpienie funkcji liniowej funkcją kawałkami liniową. Wiązało się to z wprowadzeniem górnego i dolnego ograniczenia strumienia inwestycji. Udoskonalenia sposobu modelowania strumienia inwestycji przedstawił także Goodwin (1951). Idea Goodwina przekłada się na zastosowanie funkcji arcustangens do modelowania strumienia inwestycji. Puu (2003) w modelowaniu strumienia inwestycji uwzględnia także inwestycje rządowe i cały proces opisuje przy pomocy wielomianu trzeciego stopnia:

$$I_t = v\left(Y_{t-1} - Y_{t-2}\right) - v\left(Y_{t-1} - Y_{t-2}\right)^3,\ v > 0\,. \tag{2}$$

W niniejszej pracy (podobnie jak w: Kruszewski, 2016), uwzględnione będą dodatkowo inwestycje autonomiczne $I_0 > 0$, zatem

$$I_t = I_0 + v(Y_{t-1} - Y_{t-2}) - v(Y_{t-1} - Y_{t-2})^3, v > 0. \tag{3}$$

Podstawiając równania (1) i (3) do równania bilansowego

$$Y_t = C_t + I_t + G_t \tag{4}$$

oraz zakładając stałość wydatków rządowych $G_t = G_0 = const > 0$, otrzymujemy autonomiczne równanie różnicowe nieliniowe drugiego rzędu:

$$Y_t = (1-s)Y_{t-1}^{\alpha} + sY_{t-2} + v(Y_{t-1} - Y_{t-2}) - v(Y_{t-1} - Y_{t-2})^3 + I_0 + C_0 + G_0, \tag{5}$$

które jest równoważne następującemu autonomicznemu układowi dwóch równań różnicowych pierwszego rzędu:

$$\begin{cases} Y_t = (1-s)Y_{t-1}^{\alpha} + sX_{t-1} + v(Y_{t-1} - X_{t-1}) - v(Y_{t-1} - X_{t-1})^3 + I_0 + C_0 + G_0 \\ X_t = Y_{t-1} \end{cases} \tag{6}$$

Powyższy układ równań różnicowych jest nieliniowy i dodatkowo nie istnieje jego analityczne rozwiązanie opisujące zachowanie się zmiennych (Y_t, X_t) w każdej chwili czasu t. Do analizy układu (6) zostaną użyte narzędzia jakościowej teorii nieliniowych równań różnicowych.

Niech $F: R^2 \to R^2$ będzie odwzorowaniem oznaczającym prawą stronę układu (6):

$$F(y,x) = \begin{cases} (1-s)y^{\alpha} + sx + v(y-x) - v(y-x)^3 + I_0 + C_0 + G_0 \\ y \end{cases} \tag{7}$$

Pierwszym elementem jakościowej analizy układu (6) jest wyznaczenie położenia równowagi (rozwiązania stacjonarnego). Równowaga układu (6) jest punktem stałym odwzorowania F. Punkt stały (y_*, x_*) odwzorowania F spełniają warunek:

$$F(y_*, x_*) = (y_*, x_*), \tag{8}$$

który jest równoważny układowi równań:

$$\begin{cases} H(y_*) = (1-s)y_*^{\alpha} - (1-s)y_* + I_0 + C_0 + G_0 = 0 \\ x_* = y_* \end{cases} \tag{9}$$

Twierdzenie 1.

Jeżeli $I_a + C_a + G_a > 0$ oraz $0 < \alpha < 1$, to odwzorowanie F posiada jeden punkt stały $E(y_*, y_*)$ taki, że $y_* > \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

Dowód:

Przy założeniu dodatnich wydatków autonomicznych warunek (9) redukuje się do równania:

$$(1-s)y_*^{\alpha} = (1-s)y_* - (I_0 + C_0 + G_0),$$

którego pierwiastki są miejscami zerowymi funkcji

$$G(y) = (1-s)y^{\alpha} - (1-s)y + (I_0 + C_0 + G_0) \quad y \geq 0.$$

Funkcja $G(y)$ jest: ciągła, rosnąca w przedziale $\left(0, \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)$, malejąca w przedziale $\left(\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}, \infty\right)$, w zerze przyjmuje wartość dodatnią $(G(0) = I_0 + C_0 + G_0 > 0)$ i dąży do minus nieskończoności, gdy argument rośnie do nieskończoności $\left(\lim_{y\to\infty} G(y) = \lim_{y\to\infty}\left\{(1-s)y\left[y^{\alpha-1} - 1\right] + I_0 + C_0 + G_0\right\} = -\infty\right)$. Funkcja $G(y)$, o podanych powyżej własnościach, posiada dokładnie jedno miejsce zerowe y_* spełniające nierówność $y_* > \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}$.■

Twierdzenie 2.

Załóżmy, że $\alpha > 1$. Odwzorowanie F posiada dwa punkty stałe $E_1(y_1, y_1)$ i $E_1(y_2, y_2)$ takie, że $y_1 < \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} < y_2$, jeśli $0 < I_0 + C_0 + G_0 < (1-s)(\frac{1}{\alpha})^{\frac{1}{\alpha-1}}(1-\frac{1}{\alpha})$. Dla $I_0 + C_0 + G_0 = (1-s)(\frac{1}{\alpha})^{\frac{1}{\alpha-1}}(1-\frac{1}{\alpha}))$ odwzorowanie F posiada jeden punkt stały $E(y_1, y_1)$ taki, że $y_1 = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$, a dla $I_0 + C_0 + G_0 > (1-s)(\frac{1}{\alpha})^{\frac{1}{\alpha-1}}(1-\frac{1}{\alpha})$ odwzorowanie F nie posiada punktów stałych.

Dowód:

Przy założeniu dodatnich wydatków autonomicznych warunek (9) redukuje się do równania:

$$(1-s)y_*^{\alpha} = (1-s)y_* - (I_0 + C_0 + G_0),$$

którego pierwiastki są miejscami zerowymi funkcji

$$G(y) = (1-s)y^{\alpha} - (1-s)y + (I_0 + C_0 + G_0) \quad y \geq 0 .$$

Funkcja $G(y)$ jest: ciągła, malejąca w przedziale $\left(0, \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)$, rosnąca w przedziale $\left(\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}, \infty\right)$, w zerze przyjmuje wartość dodatnią $\left(G(0) = I_0 + C_0 + G_0 > 0\right)$ i dąży do plus nieskończoności, gdy argument rośnie do nieskończoności $\left(\lim_{y\to\infty} G(y) = \lim_{y\to\infty}\left\{(1-s)y\left[y^{\alpha-1} - 1\right] + I_0 + C_0 + G_0\right\} = +\infty\right)$. W punkcie $\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}$ funkcja $G(y)$ osiąga minimum globalne $G_{\min}(\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}) = (1-s)(\frac{1}{\alpha})^{\frac{1}{\alpha-1}}(\frac{1}{\alpha} - 1) + I_0 + C_0 + G_0$. Jeżeli $G_{\min}(\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}) < 0$, czyli gdy $0 < I_0 + C_0 + G_0 < (1-s)(\frac{1}{\alpha})^{\frac{1}{\alpha-1}}(1 - \frac{1}{\alpha})$, to odwzorowanie F posiada dwa punkty stałe $E_1(y_1, y_1)$ i $E_1(y_2, y_2)$ takie, że $y_1 < \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} < y_2$. Jeśli $G_{\min}(\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}) = 0$, to odwzorowanie F posiada jeden punkt stały $E_1(y_1, y_1)$, gdzie $y_1 = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$. Odwzorowanie F nie posiada punktów stałych, gdy $G_{\min}(\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}) > 0$ i wówczas $I_0 + C_0 + G_0 > (1-s)(\frac{1}{\alpha})^{\frac{1}{\alpha-1}}(1 - \frac{1}{\alpha})$.■

Kolejnym etapem analizy jakościowej badanego modelu jest ustalenie warunków, jakie muszą spełniać zmienne egzogeniczne, by stany stacjonarne były lokalnie asymptotycznie stabilne. Stabilność równowagi stacjonarnej układu (6) zależy od wartości własnych macierzy Jakobiego odwzorowania *F*, która przyjmuje postać:

$$J(y,x) = \begin{bmatrix} (1-s)\alpha y^{\alpha-1} + v - 3v(y-x)^2 & s - v + 3(y-x)^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Analizę lokalnej asymptotycznej stabilności punktów stałych (rozwiązań stacjonarnych) układu (6) rozpoczyna od przypadku, gdy $\alpha > 1$. Macierz Jakobiego odwzorowania *F* w punkcie E_1 i E_2 przyjmuje postać:

$$J(E_i) = \begin{bmatrix} (1-s)\alpha y_i^{\alpha-1} + v & s - v \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Równowaga stacjonarna E_i układu (6) jest lokalnie asymptotycznie stabilna, gdy moduły wartości własnych macierzy linearyzacji $J(E_i)$ są mniejsze od jedności. Warunek ten jest spełniony jeśli[1]:

[1] Medio, Lines (2001).

$$\begin{aligned} 1+trJ(E_i)+\det J(E_i)&>0 \\ 1-trJ(E_i)+\det J(E_i)&>0 \\ 1-\det J(E_i)&>0 \end{aligned} \tag{11}$$

Ślad i wyznacznik macierzy linearyzacji są równe odpowiednio: $trJ(E_1)=(1-s)\alpha y_i^{\alpha-1}+v$ i $\det J(E_1)=v-s$. Pierwsza nierówność jest spełniona dla wszystkich dopuszczalnych wartości parametrów modelu, gdyż $trJ(E_i)>0$ i $\det J(E_i)>-1$. Trzecia nierówność jest prawdziwa, gdy $v<1+s$. Druga nierówność przyjmuje postać $1-s+(1-s)\alpha y_i^{\alpha-1}>0$ i jest spełniona, gdy $y_i<\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$ i tym samym równowaga $E_2(y_2,y_2)$ jest niestabilna, gdyż $y_2>\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$.

Macierz Jakobiego odwzorowania *F*, dla $0<\alpha<1$, w równowadze $E(y_*,y_*)$ przyjmuje postać:

$$J(E)=\begin{bmatrix} (1-s)\alpha y_*^{\alpha-1}+v & s-v \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Równowaga E jest lokalnie asymptotycznie stabilna dla $0<v<1+s$, gdyż wówczas warunek (11) jest spełniony. Pierwsza nierówność jest spełniona, gdyż $trJ(E)>0$ i $\det J(E)>-1$. Trzecia nierówność jest prawdziwa, gdy $v<1+s$. Druga nierówność przyjmuje postać $1-s+(1-s)\alpha y_*^{\alpha-1}>0$ i jest spełniona, gdyż $y_*>\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

Wniosek:

Jeśli $I_0+C_0+G_0>0$ i $\alpha>1$, to równowaga E_2 jest zawsze niestabilna, a równowaga E_1 jest lokalnie asymptotycznie stabilna, gdy $0<v<1+s$.

Jeśli $I_0+C_0+G_0>0$ i $0<\alpha<1$, to równowaga E jest lokalnie asymptotycznie stabilna, gdy $0<v<1+s$.

2. Bifurkacje, atraktory i dynamika globalna

Jedną z fundamentalnych cech nieliniowych równań różnicowych jest duża różnorodność możliwych scenariuszy opisujących dynamiczne własności rozwiązań. Rozwiązania mogą zbiegać do równowagi stacjonarnej, rozwiązania okresowego, quasi-okresowego lub zachowywać się chaotycznie. Rozwiązania chaotyczne

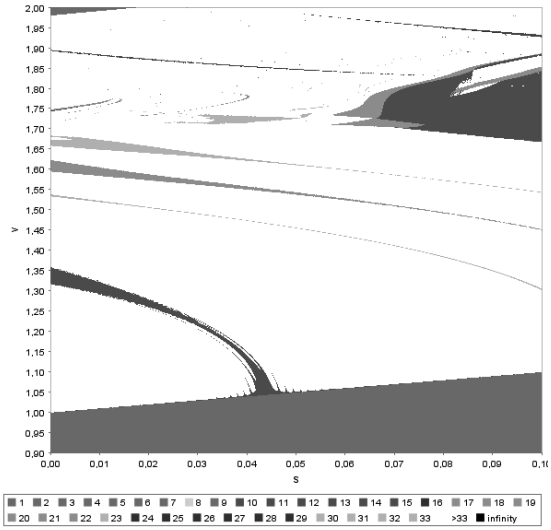
są wrażliwe na małe zmiany warunku początkowego. Własność ta istotnie ogranicza zakres prognozy badanej zmiennej ekonomicznej i uwypukla istotność badania dynamiki nieliniowych modeli ekonomicznych pod kątem występowania zjawiska chaosu deterministycznego.

By móc analizować trajektorie cykliczne, quasi-okresowe i chaotyczne w badanym modelu, konieczne jest przekroczenie granicy obszaru asymptotycznej stabilności stanów stacjonarnych, wyznaczonych w części pierwszej niniejszej pracy. Przekraczanie obszaru lokalnej asymptotycznej stabilności wiąże się z występowaniem zjawiska bifurkacji.

W badanym modelu występują dwa typy bifurkacji: bifurkacja styczna i bifurkacja Neimarka-Sackera. W wyniku bifurkacji Neimarka-Sackera, w układzie dynamicznym, pojawiają się orbity okresowe lub quasi-okresowe. W wyniku bifurkacji stycznej w badanym modelu zmienia się liczba równowag stacjonarnych. Naruszenie drugiej nierówności w warunku (11) jest konieczne do zaistnienia bifurkacji stycznej (*fold bifurcation*), zwanej także bifurkacją typu siodło-węzeł (*saddle-node bifurcation*). Wówczas jedna z wartości własnych macierzy linearyzacji jest równa 1. Opisany scenariusz ma miejsce, gdy $1 - TrJ(E_i) + DetJ(E_i) = 0$ oraz $TrJ(E_i) \in (0,2)$ i $DetJ(E_i) \in (-1,1)$ (pozostałe warunki są spełnione). Ten typ bifurkacji zachodzi dla $\alpha > 1$. Wraz ze zwiększającymi się wydatkami autonomicznymi równowagi E_1 i E_2 przybliżają się do siebie i po przekroczeniu granicznej wartości (punkt bifurkacji) w badanym modelu nie istnieją już równowagi stacjonarne.

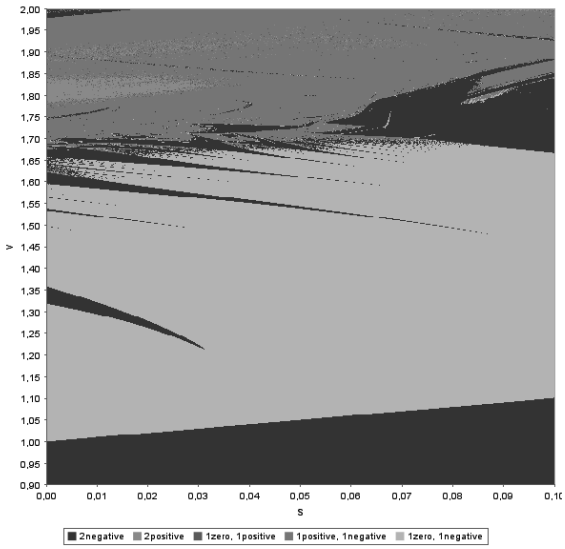
Naruszenie trzeciej nierówności w warunku (11) jest konieczne do zaistnienia bifurkacji Neimarka-Sackera. Wówczas macierz linearyzacji ma parę zespolonych sprzężonych wartości własnych, których moduł jest równy jedności. Opisany scenariusz ma miejsce, gdy $1 - DetJ(E_i) = 0$ oraz pierwsze dwie nierówności są spełnione, tj. $TrJ(E_i) \in (-2,2)$. W badanym modelu utrata stabilności przez równowagę stacjonarną, w wyniku bifurkacji Neimarka-Sackera, prowadzi zawsze do powstania atraktorów quasi-okresowych.

Rysunek 1. Dwuwymiarowy diagram bifurkacyjny: $\alpha = 0.8$, $I_0 + G_0 + C_0 = 1$



Źródło: obliczenia własne.

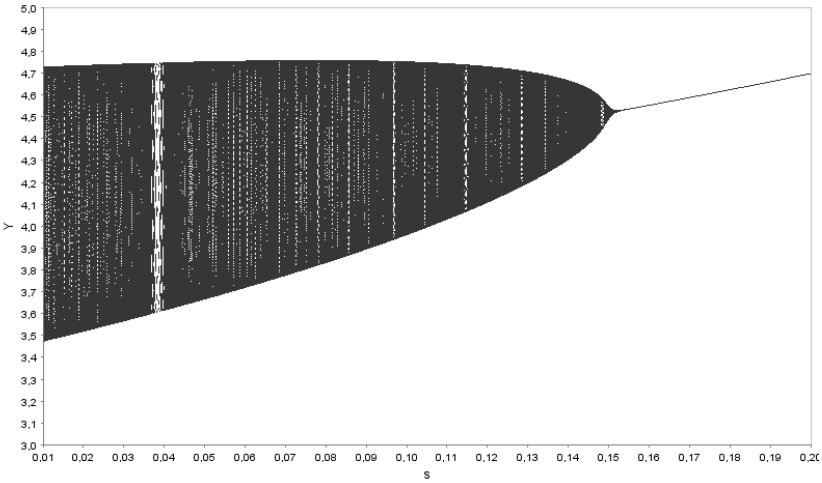
Rysunek 2. Wykładniki Lapunowa: $\alpha = 0.8$, $I_0 + G_0 + C_0 = 1$



Źródło: obliczenia własne.

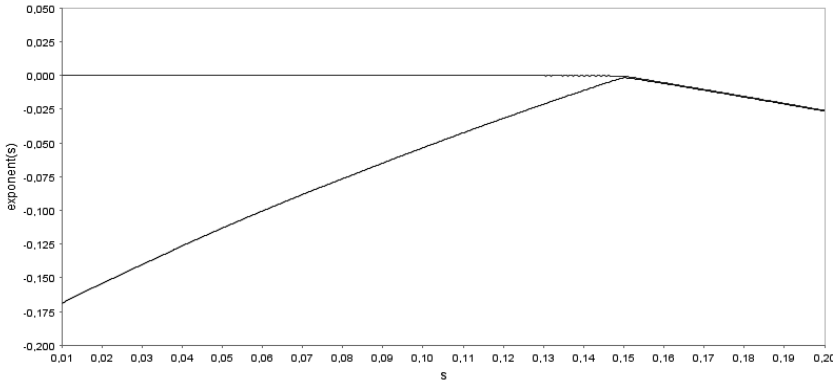
Na rysunku 1 przedstawiono dwuwymiarowy diagram bifurkacyjny badanego modelu dla parametrów (s,v). Odcieniami szarości zaznaczone wartości parametrów, dla których ścieżka czasowa produktu krajowego zbiega do atraktorów okresowych. Kolorem białym zaznaczone są kombinacje, dla których w badanym modelu istnieją atraktory quasi-okresowe lub chaotyczne. Rozróżnienie między atraktorami chaotycznymi i quasi okresowymi umożliwiają wykładniki Lapunowa (rys. 2). Atraktory quasi-okresowe charakteryzuje zerowa wartość największego wykładnika Lapunowa i ujemna wartość drugiego wykładnika. Atraktory chaotyczne wyróżnia co najmniej jeden dodatni wykładnik Lapunowa. Wzdłuż prostej $v = 1 + s$ w badanym modelu występuje bifurkacja Neimarka-Sackera, w wyniku której pojawiają się atraktory quasi-okresowe. Występowanie atraktorów chaotycznych związane jest z wartościami akceleratora przekraczającymi wartość 1.76.

Rysunek 3. Diagram bifurkacyjny: $\alpha = 0.8$, $v = 1.15$, $I_0 + G_0 + C_0 = 1$



Źródło: obliczenia własne.

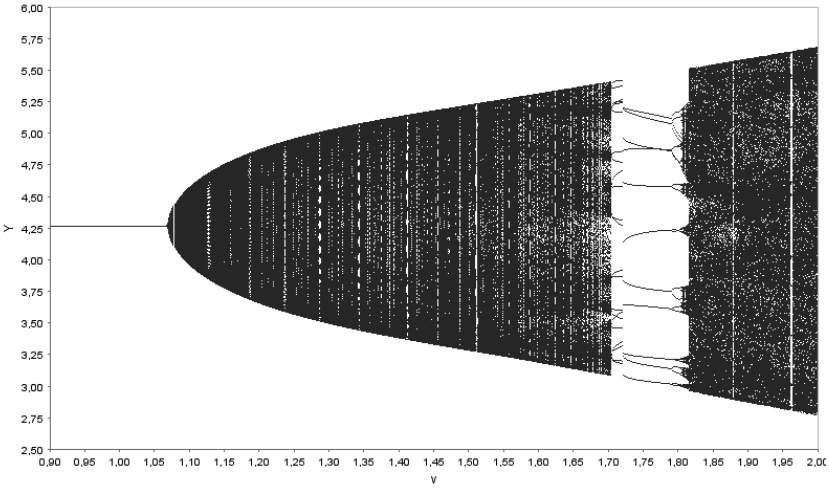
Rysunek 4. Wykładniki Lapunowa: $\alpha = 0.8$, $v = 1.15$, $I_0 + G_0 + C_0 = 1$



Źródło: obliczenia własne.

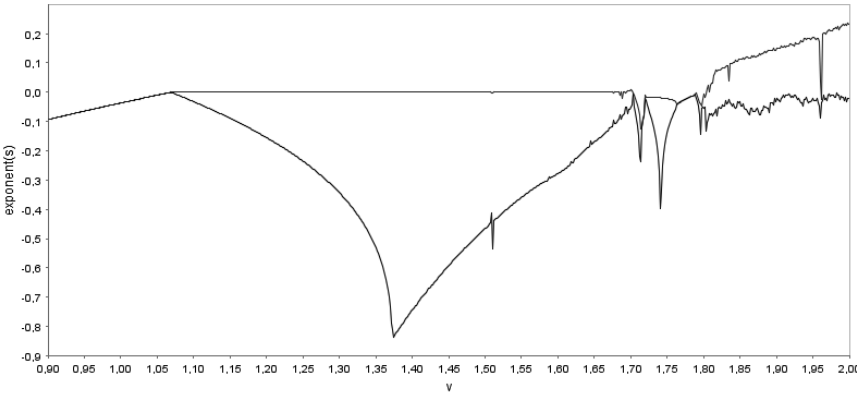
Na rysunku 3 przedstawiono diagram bifurkacyjny badanego modelu. Ilustruje on długookresową dynamikę produktu krajowego jako funkcję skłonności do oszczędzania. Niskie wartości parametru s oznaczają wysoką skłonność do konsumpcji i w powiązaniu z akceleratorem równym 1.15 skutkują występowaniem atraktorów quasi-okresowych. Brak jest w tym obszarze atraktorów okresowych, największy wykładnik Lapunowa jest równy zero (rys. 4). Rosnąca skłonność do oszczędzania zmniejsza amplitudę wahań i po przekroczeniu wartości progowej (punktu bifurkacji) $s_{bif} = v - 1$, produkt krajowy zbiega do stanu stacjonarnego.

Rysunek 5. Diagram bifurkacyjny: $\alpha = 0.8$, $s = 0.07$, $I_0 + G_0 + C_0 = 1$



Źródło: obliczenia własne.

Rysunek 6. Wykładniki Lapunowa: $\alpha = 0.8$, $s = 0.07$, $I_0 + G_0 + C_0 = 1$



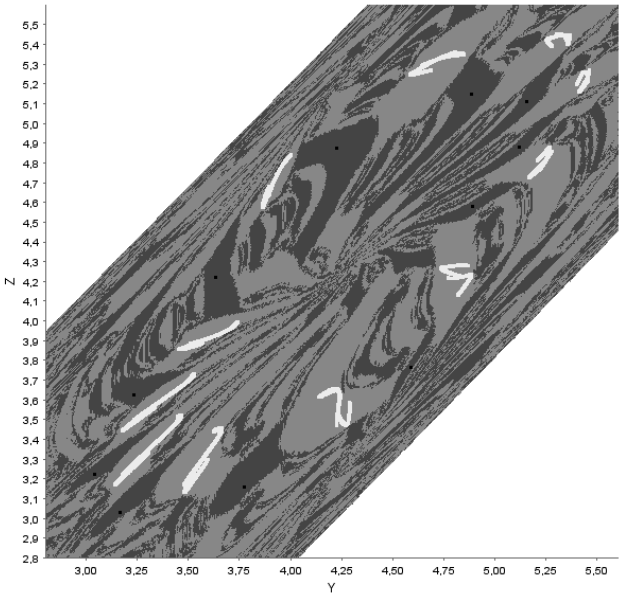
Źródło: obliczenia własne.

Scenariusz zmian długookresowych własności badanego modelu ze względu na rosnące wartości akceleratora przedstawiono na rysunku 5. Początkowo stabilna jest równowaga stacjonarna, po przekroczeniu punktu bifurkacji $v_{bif} = 1 + s$ pojawiają się atrak-

tory quasi-okresowe. Dalszy wzrost parametru v prowadzi do pojawienia się rozwiązań cyklicznych o niskim okresie. W następnej fazie, w wyniku globalnej bifurkacji podwojenia okresu, pojawiają się atraktory cykliczne o coraz dłuższym okresie, by ostatecznie w wyniku kaskady podwojenia okresu wygenerować atraktory chaotyczne. Struktura diagramu bifurkacyjnego przedstawionego na rysunku 5 wskazuje na występowanie zjawiska wielostabilności, czyli występowania różnego typu atraktorów dla tej samej kombinacji zmiennych egzogenicznych. Analiza zjawiska wielostabilności sprowadza się do analizy przestrzeni fazowej w poszukiwaniu atraktorów i ich basenów przyciągania.

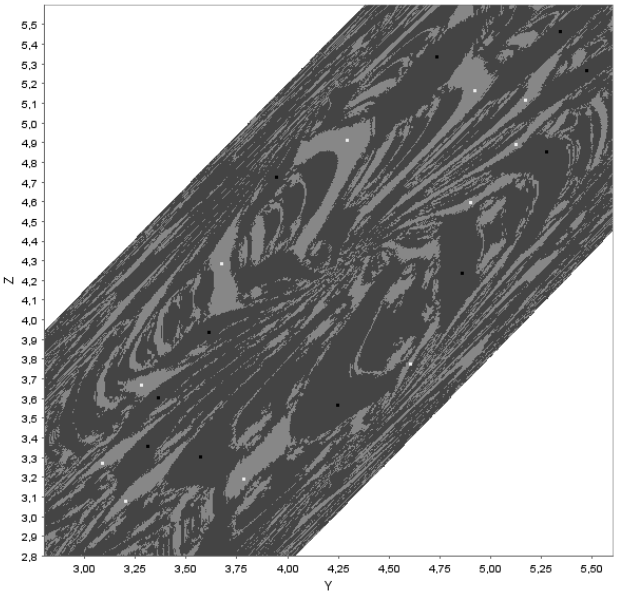
Basen przyciągania atraktora zawiera wszystkie pozycje wyjściowe gospodarki, które w długim okresie zbiegają do danego atraktora. Analiza basenów przyciągania pozwala odpowiedzieć na następujące pytanie: Dlaczego gospodarki o takich samych parametrach i niewiele różniących się pozycjach wyjściowych charakteryzują całkowicie odmiennym zachowaniem długookresowym?

Rysunek 7. Atraktor chaotyczny i okresowy wraz z obszarami przyciągania:
$\alpha = 0.8$, 0.07, $v = 1.76$, $I_0 + G_0 + C_0 = 1$



Źródło: obliczenia własne.

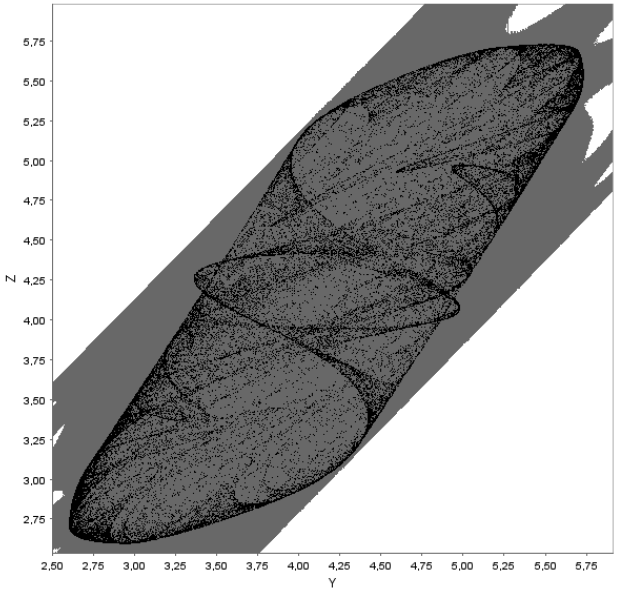
Rysunek 8. Atraktory cykliczne o okresie 11 wraz z obszarami przyciągania:
$\alpha = 0.8$, $s = 0.08$, $v = 1.76$, $I_0 + G_0 + C_0 = 1$



Źródło: obliczenia własne.

Współistnienie różnych atraktorów, atraktora chaotycznego i cyklicznego (rys. 7) oraz dwóch różnych atraktorów cyklicznych o okresie 11 (rys. 8), jest cechą charakterystyczną badanego modelu. Warunkiem koniecznym zaistnienia tego zjawiska jest wysoka wartość akceleratora i niski udział oszczędności w produkcie krajowym. Wyższe wartości akceleratora, powyżej 1.8, gwarantują występowanie jedynie atraktorów chaotycznych (rys. 9).

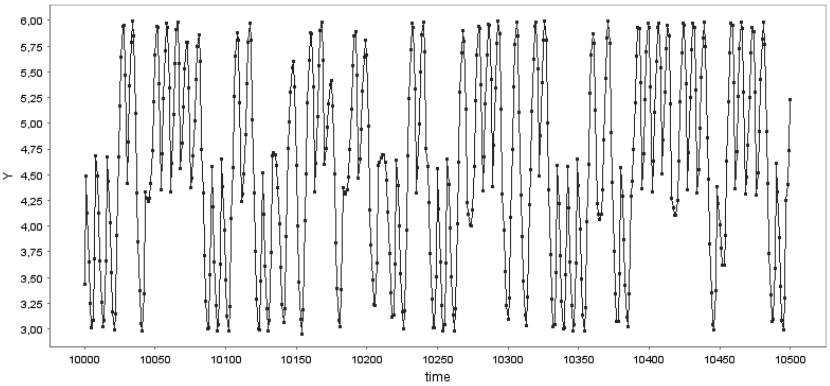
Rysunek 9. Atraktor chaotyczny:
$\alpha = 0.8$, $s = 0.05$, $v = 2.1$, $I_0 + G_0 + C_0 = 1$



Źródło: obliczenia własne.

Istnienie atraktorów o tak złożonej strukturze jest warunkiem koniecznym wystąpienia trajektorii produktu krajowego, która posiada wiele cech morfologicznych rzeczywistych cykli gospodarczych. Fazy spowolnienia i ożywienia gospodarczego pojawiają się nieregularnie, a ich amplituda jest zróżnicowana (rys. 10). Trajektorie te są matematycznym modelem endogenicznych cykli gospodarczych.

Rysunek 10. Trajektoria produktu krajowego:
$\alpha = 0.8$, $s = 0.05$, $v = 2.1$, $I_0 + G_0 + C_0 = 1$



Źródło: obliczenia własne.

Podsumowanie

Zaproponowany nieliniowy model cyklu gospodarczego obrazujący współdziałanie mnożnika i akceleratora jest przykładem modelu cyklu koniunkturalnego opartego na połączonym działaniu efektu mnożnikowego i zasady akceleracji. Dynamika modelu jest złożona, występuje zjawisko wielostabilności, począwszy od współistnienia rozwiązań cyklicznych o różnej amplitudzie, po współistnienie atraktorów cyklicznych i chaotycznych. Utrata lokalnej asymptotycznej stabilności przez równowagę, w przedstawionym modelu, nie oznacza niestabilności modelu. Pojawiają się atraktory cykliczne, quasi-okresowe i chaotyczne, które są matematycznym modelem endogenicznego cyklu koniunkturalnego. Uwzględnienie dwuokresowych opóźnień w sposobie modelowania konsumpcji poszerzyło obszar lokalnej asymptotycznej stabilności równowagi stacjonarnej i uwypukliło rolę, jaką odgrywa skłonność do oszczędzania w powstawaniu atraktorów cyklicznych. Odpowiednio wysoka skłonność do oszczędzania jest w stanie zagwarantować istnienie rozwiązań cyklicznych, nawet gdy wartości akceleratora są już wysokie, co przy niskiej skłonności do oszczędzania wiąże się z występowaniem zjawiska chaosu deterministycznego. W przedstawionym modelu istnieją ścieżki czasowe posiadające większość cech morfologicznych rzeczywistych cykli gospodarczych. Istnienie rozwiązań o ta-

kich cechach zawsze wiąże się z odpowiednio wysoką wartością akceleratora, która jest niezbędna do wystąpienia atraktorów o odpowiednio złożonej strukturze.

Literatura

Gallegati, M., Gardini, L., Puu, T., Sushko, I. (2003). Hicks' Trade Cycle Revisited: Cycles and Bifurcations. *Mathematics and Computers in Simulation*, *63*, 505–527.

Goodwin, R.M. (1951). The Nonlinear Accelerator and the Persistence of Business Cycles. *Econometrica*, *19*, 1–17.

Hicks, J.R. (1950). *A Contribution to the Theory of the Trade Cycle*. Oxford: Oxford University Press.

Kruszewski, R. (2016). Atraktory okresowe, quasi-okresowe i chaotyczne w nieliniowym modelu Hicksa. *Studia i Prace WNEiZ US*, *44/2*, 191–208.

Lorenz, H.W. (1992). Multiple Attractors, Complex Basin Boundaries, and Transient Motion in Deterministic Economic Systems. W: G. Feichtinger (red.), *Dynamic Economic Models and Optimal Control.* Amsterdam: North-Holland.

Manfredia, P., Fantib, L. (2004). Cycles in Dynamic Economic Modeling. *Economic Modelling*, *21*, 573–594.

Matsumotoa, A., Szidarovszky, F. (2015). Nonlinear Multiplier-accelerator Model with Investment and Consumption Delays. *Structural Change and Economic Dynamics*, *33*, 1–9.

Medio, A., Lines, M. (2001). *Economic Dynamics. A Primer*. Cambridge: Cambridge University Press.

Puu, T. (2003). *Attractors, Bifurcations, & chaos*. Berlin–Heilderberg–New York: Springer.

Puu, T., Gardini, L., Sushko, I. (2005). A Hicksian Multiplier-accelerator Model with Floor Determined by Capital Stock. *Journal of Economic Behavior & Organization*, *56*, 331–348.

Puu, T., Sushko, I. (2004). A Business Cycle Model with Cubic Nonlinearity. *Chaos, Solitons and Fractals*, *19*, 597–612.

Saura, D., Vazquez, F.J., Vegas, J.M. (1998). Non-chaotic Oscillations in Some Regularized Hicks Models. A Restatement of the Ceiling and Floor Conditions. *Journal of Economic Dynamics and Control*, *22*, 661–678.

Sushko, I., Gardini, L., Puu, T. (2010). Regular and Chaotic Growth in a Hicksian Floor/Ceiling Model. *Journal of Economic Behavior & Organization*, *75*, 77–94.

NONLINEAR BUSINESS CYCLE MODEL

Abstract

We investigate the dynamics of the proposed nonlinear business cycle model with nonlinear investment and consumption functions. The possible long-term behaviour of the national income has been described. We investigate, how the dynamics of the model depend on parameters.

Keywords: business cycle, equilibrium, chaos, bifurcation, attractor

JEL codes: C02, C62, E32