Henryk Kowgier

O sposobie znajdowania zbioru portfeli efektywnych

Studia i Prace Wydziału Nauk Ekonomicznych i Zarządzania 9, 642-650

2008

Artykuł został opracowany do udostępnienia w internecie przez Muzeum Historii Polski w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego. Artykuł jest umieszczony w kolekcji cyfrowej bazhum.muzhp.pl, gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach dozwolonego użytku.

MUZEUM HISTORII POLSKI

STUDIA I PRACE WYDZIAŁU NAUK EKONOMICZNYCH I ZARZĄDZANIA NR 9

HENRYK KOWGIER

O SPOSOBIE ZNAJDOWANIA ZBIORU PORTFELI EFEKTYWNYCH

Wprowadzenie

Celem tego artykułu jest pokazanie na wybranych przykładach sposobu znajdowania zbioru portfeli efektywnych. Autor dokonuje również porównania tych portfeli pod kątem ponoszonego ryzyka i oczekiwanej stopy zwrotu.

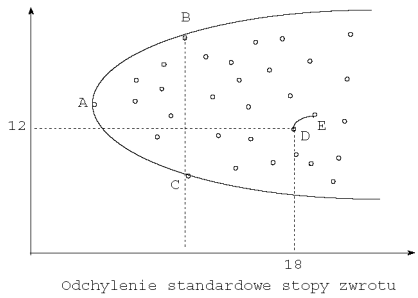
Wiadomości wstępne

W oparciu o rozpatrywaną populację akcji można utworzyć różnego rodzaju portfele akcji: Zbiór wszystkich takich portfeli nazywamy zbiorem możliwości inwestycyjnych. Nie wszystkie jednak z tych portfeli są równie atrakcyjne. Przykładowo dla danego poziomu ryzyka reprezentowanego odchyleniem standardowym preferuje się portfele o jak najwyższej stopie zwrotu. Podobnie dla danego poziomu oczekiwanej stopy zwrotu preferuje się portfele charakteryzujące się jak najniższym ryzykiem[1].

Przedstawione na powyższym rysunku punkty obrazują umiejscowienie poszczególnych akcji. I tak stopa zwrotu oraz odchylenie standardowe np. akcji oznaczonej literą D wynoszą odpowiednio: E(R) = 12 % oraz S(R) = 18 %. Krzywą ograniczającą zbiór punktów na rys. 1 nazywamy zbiorem minimalnego ryzyka. Można wykazać, że zbiór minimalnego ryzyka w układzie: odchylenie standardowe stopy zwrotu – oczekiwana stopa zwrotu jest hiperbolą[2]. Każdy z portfeli należący do zbioru minimalnego ryzyka posiada najniższe możliwe do osiągnięcia odchylenie standardowe (lub wariancję) dla danego poziomu ocze-

[1] Patrz rys.1 i [2].
[2] Patrz [2].

kiwanej stopy zwrotu. Ponadto każdy portfel ze zbioru minimalnego ryzyka reprezentuje portfel utworzony na podstawie wszystkich akcji należących do rozpatrywanej populacji[3]. Krzywą minimalnego ryzyka można podzielić na dwie połowy tzn. górną i dolną. Na powyższym rysunku połowy te oddziela od siebie punkt A. Reprezentuje on globalny portfel minimalnego ryzyka. Jak nietrudno zauważyć z rys. 1 portfel ten charakteryzuje najniższe (przy danym składzie populacji akcji) odchylenie standardowe oczekiwanej stopy zwrotu. Dla inwestorów zdecydowanie bardziej interesująco przedstawia się górna część zbioru minimalnego ryzyka (zbiór efektywny), ponieważ portfele efektywne leżące na tej części krzywej posiadają najwyższą możliwą do osiągnięcia dla danego poziomu ryzyka oczekiwaną stopę zwrotu.



Rys. 1. Zbiór minimalnego ryzyka.
Źródło: Opracowanie własne.

Porównując portfele B i C na rys. 1 widać, że oba one znajdują się w zbiorze minimalnego ryzyka jednak tylko portfel B jest efektywny, gdyż posiada najwyższą stopę zwrotu przy danym odchyleniu standardowym. Z istniejących akcji można tworzyć różne portfele inwestycyjne. Inwestując np. w akcje D i E otrzymamy portfel znajdujący się w dowolnym punkcie ich linii kombinacji (linia przerywana).

Załóżmy, że posiadamy portfel składający się z N akcji. Powstaje pytanie jak zmierzyć oczekiwaną stopę zwrotu tego portfela. Aby to uczynić możemy posłużyć się następującym wzorem[4]:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^{N} x_i E(R_i), \tag{1}$$

[3] Ibidem.
[4] Ibidem.

gdzie :

$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$, dla $x_i \geq 0$,

$E(R_i)$ – oczekiwana stopa zwrotu i – tej akcji,

x_i – udział ceny zakupu i – tej akcji spółki w cenie zakupu portfela.

W szczególności oczekiwana stopa zwrotu i –tej akcji przyjmuje postać[5]:

$$E(R_i) = \frac{\sum_{i=1}^{M} R_i}{M} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\frac{P_{t_i} - P_{t_{i-1}} + D_{t_i}}{P_{t_{i-1}}}, \text{ dla } 1 \leq i \leq N \tag{2}$$

gdzie:

$$R_i = \frac{P_{t_i} - P_{t_{i-1}} + D_{t_i}}{P_{t_{i-1}}} \tag{3}$$

R_i – stopa zwrotu i-tej akcji (i = 1,2,…,N),

P_{t_i} – cena i-tej akcji w okresie t,

P_{t_i-1} – cena i-tej akcji w okresie t -1,

D_{t_i} – dywidenda i-tej akcji wypłacana w t – tym okresie,

M – liczba wszystkich analizowanych stóp zwrotu.

Wobec powyższego równanie (1) możemy napisać w następującej postaci:

$$E(R_p) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{t=1}^{M}\frac{P_{t_i} - P_{t_i-1} + D_{t_i}}{P_{t_i-1}} \tag{4}$$

przy dodatkowym założeniu, że liczba analizowanych stóp zwrotu dla każdej akcji wchodzącej w skład portfela wynosi M.

Podobnie wartości odchylenia standardowego S_i i-tej akcji, współczynniki korelacji r_{ij} między i –tą i j - tą akcją obliczamy według wzorów odpowiednio[6]:

$$S_i = \sqrt{\frac{1}{M-1}\sum_{k=1}^{M}\{R_{i_k} - E(R_i)\}^2} \tag{5}$$

$$r_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{M}\{R_{i_k} - E(R_i)\}\{R_{j_k} - E(R_j)\}}{(M-1)S_i S_j} \tag{6}$$

gdzie:

R_{i_k} – możliwe stopy zwrotu i-tej akcji (k = 1,2,...,M),

[5] Patrz [3].
[6] Ibidem.

R_{jk} – możliwe stopy zwrotu j-tej akcji (k = 1,2,...,M),

$E(R_i)$ – wartość oczekiwana stopy zwrotu i-tej akcji,

$E(R_j)$ – wartość oczekiwana stopy zwrotu j-tej akcji,

zaś S_i oraz S_j obliczamy zgodnie ze wzorem (5).

Analogicznie można wykazać[7], że wariancję i odchylenie standardowe portfela N – składnikowego wyraża wzór odpowiednio:

$$\sigma^2(R_p) = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sigma^2(R_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+\hat{i}}^{N} x_i x_j S_i S_j r_{ij}, \tag{7}$$

$$S(R_p) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 S_i^2 + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+\hat{i}}^{N} x_i x_j S_i S_j r_{ij}}, \qquad \hat{i} = 1,2,\ldots, N-1 \cdot \tag{8}$$

Do wyznaczania zbioru portfeli efektywnych może posłużyć metoda tzw. nieoznaczonych mnożników Lagrange'a[8]. W metodzie tej minimalizuje się wariancję portfela przy z góry zadanych warunkach ograniczających. To znaczy funkcja celu oraz warunki ograniczające wyglądają dla portfela składającego się N akcji jak poniżej[9]:

$$\sigma^2_{MIN}(R_p) = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sigma^2(R_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+\hat{i}}^{N} x_i x_j S_i S_j r_{ij} \leftarrow \text{funkcja celu}$$

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^{N} x_i E(R_i), \quad \sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \leftarrow \text{warunki ograniczające.} \tag{9}$$

Zastanówmy się obecnie, jakie warunki musi spełniać portfel odznaczający się minimalnym ryzykiem. W tym celu należy rozpatrzyć funkcję Lagrange'a daną wzorem:

$$F(R_p) = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 S_i^2(R_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+\hat{i}}^{N} x_i x_j S_i S_j r_{ij} + \lambda\left(\sum_{i=1}^{N} x_i - 1\right) \cdot \tag{10}$$

Jak widać powyżej jest to funkcja kwadratowa. Warunkiem koniecznym na to, aby (10) osiągała minimum jest zerowanie się jednocześnie pierwszych pochodnych cząstkowych:

$$\frac{\partial F(R_p)}{\partial x_1} = 2S_1^2 x_1 + 2x_2 S_1 S_2 r_{12} + 2x_3 S_1 S_3 r_{13} + \ldots + 2x_N S_1 S_N r_{1N} + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F(R_p)}{\partial x_2} = 2x_1 S_2 S_1 r_{21} + 2S_2^2 x_2 + 2x_3 S_2 S_3 r_{23} + \ldots + 2x_N S_2 S_N r_{2N} + \lambda = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{11}$$

[7] Ibidem.
[8] Patrz [1].
[9] Patrz [3].

$$\frac{\partial F(R_p)}{\partial x_N} = 2x_1S_NS_1r_{N1} + 2x_2S_NS_2r_{N2} + 2x_3S_NS_3r_{N3} + \ldots + 2S_N^2x_N + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F(R_p)}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_N - 1 = 0$$

Układ równań (11) jest układem N + 1 równań o N + 1 niewiadomych. Można go zapisać również w postaci macierzowej:

$$AX = Y \tag{12}$$

Rozwiązując ostatnie równanie otrzymujemy:

$$X = A^{-1}Y \tag{13}$$

gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} 2S_1^2 & 2S_1S_2r_{12} & \ldots & 2S_1S_Nr_{1N} & 1 \\ 2S_2S_1r_{21} & 2S_2^2 & \ldots & 2S_2S_Nr_{2N} & 1 \\ . & . & \ldots & . & . \\ 2S_NS_1r_{N1} & 2S_NS_2r_{N2} & \ldots & 2S_N^2 & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_N \\ \lambda \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

A^{-1} – macierz odwrotna do macierzy A,

X – wektor udziałów poszczególnych spółek w portfelu *N* składnikowym,

Y – wektor wyrazów wolnych.

Przypuśćmy, że inwestorowi zależy na tym, aby zwiększyć przeciętną stopę zwrotu swojego portfela, jednak chciałby przy tym ponieść jak najmniejsze ryzyko mierzone odchyleniem standardowym. W przypadku, gdy mamy do czynienia ogólnie z N spółkami należy rozpatrzyć funkcję Lagrange'a[10] N+2 zmiennych daną następującym wzorem:

$$F(R_p) = \sum_{ii=1}^{N} x_iS_i^2 + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+i}^{N} x_ix_jS_iS_jr_{ij} + \lambda_1(\sum_{i=1}^{N} x_i - 1) + \lambda_2\{\sum_{i=1}^{N} x_iE(R_i) - E(R_p)\}. \tag{15}$$

Warunki konieczne na minimum funkcji (15) można napisać w postaci układu N +2 równań o N + 2 niewiadomych. Przy czym układ ten jest równoważny równaniu macierzowemu postaci:

$$\begin{bmatrix} 2S_i^2 & 2S_1S_2r_{12} & \ldots & 2S_1S_Nr_{1N} & 1 & E(R_1) \\ 2S_2S_1r_{21} & 2S_2^2 & \ldots & 2S_2S_Nr_{2N} & 1 & E(R_2) \\ . & . & \ldots & . & . & . \\ 2S_NS_1r_{N1} & 2S_NS_2r_{N2} & \ldots & 2S_N^2 & 1 & E(R_N) \\ 1 & 1 & 1\ 1\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ E(R_1) & E(R_2) & \ldots & E(R_N) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_N \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \\ 1 \\ E(R_p) \end{bmatrix} \tag{16}$$

[10] Patrz [1].

gdzie:

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} 2S_1^2 & 2S_1S_2r_{12} & \dots & 2S_1S_Nr_{1N} & 1 & E(R_1) \\ 2S_2S_1r_{21} & 2S_2^2 & \dots & 2S_2S_Nr_{2N} & 1 & E(R_2) \\ . & . & \dots & . & . & . \\ 2S_NS_1r_{N1} & 2S_NS_2r_{N2} & \dots & 2S_N^2 & 1 & E(R_N) \\ 1 & 1 & 1\ 1\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ E(R_1) & E(R_2) & \dots & E(R_N) & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{X}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_N \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \overline{Y}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \\ 1 \\ E(R_p) \end{bmatrix} \tag{17}$$

Rozwiązanie równania macierzowego (16) podobnie jak (12) przyjmuje postać:

$$\overline{X} = \overline{A}^{-1} \cdot \overline{Y}. \tag{18}$$

Przykład empiryczny

Porównajmy obecnie zbiory efektywne dla portfeli czteroskładnikowych w skład których wchodzą akcje spółek: Elektrim, BRE, Uniwersal , Efekt (w pierwszym przypadku) oraz Elektrim, BRE, Uniwersal, Irena (w drugim przypadku). Do tego celu wykorzystamy tygodniowe dane z Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie za okres od stycznia 1994 do stycznia 1996. Stosując wzory (2), (3), (5), (6) przeciętne stopy zwrotu, odchylenia standardowe, współczynniki korelacji wynoszą dla tych spółek odpowiednio:

$E(R_1) = 0{,}005$; $E(R_2) = 0{,}005$; $E(R_3) = 0{,}002$; $E(R_4) = 0{,}001$;
$S_1 = 0{,}104$; $S_2 = 0{,}081$; $S_3 = 0{,}1528$; $S_4 = 0{,}15$;
$r_{12} = r_{21} = 0{,}69$; $r_{13} = r_{31} = 0{,}62$; $r_{23} = r_{32} = 0{,}46$; $r_{14} = r_{41} = 0{,}62$
$r_{24} = r_{42} = 0{,}57$; $r_{34} = r_{43} = 0{,}75$ (w pierwszym przypadku)

oraz

$E(R_1) = 0{,}005$; $E(R_2) = 0{,}005$; $E(R_3) = 0{,}002$; $E(R_4) = 0{,}008$;
$S_1 = 0{,}104$; $S_2 = 0{,}081$; $S_3 = 0{,}1528$; $S_4 = 0{,}127$;
$r_{12} = r_{21} = 0{,}69$; $r_{13} = r_{31} = 0{,}62$; $r_{23} = r_{32} = 0{,}46$; $r_{14} = r_{41} = 0{,}61$
$r_{24} = r_{42} = 0{,}52$; $r_{34} = r_{43} = 0{,}82$ (w drugim przypadku)

Stosując metodę mnożników nieoznaczonych Lagrange'a i rozwiązując za pomocą programu Mathcad 2001 Profesional równania macierzowe najpierw typu (12) a następnie (18) uzyskujemy następujące dane opisujące zbiór portfeli efektywnych dla: Elektrim, BRE, Uniwersal, Irena oraz Elektrim, BRE, Uniwersal, Efekt.

Jak widać z tabel (1–2) minimalne ryzyko mierzone odchyleniem standardowym dla portfela: Elektrim, BRE, Uniwersal, Irena wynosi 7,98% przy ocze-

kiwanej stopie zwrotu 0,55%, (co odpowiada na rys.1 punktowi A) zaś dla portfela Elektrim, BRE, Uniwersal, Efekt 7,95% przy oczekiwanej stopie zwrotu 0,52%. Nietrudno zauważyć, że struktura zbioru portfeli efektywnych dla spółek (1) Elektrim, BRE, Uniwersal, Efekt jest nieco inna niż dla spółek (2) Elektrim, BRE, Uniwersal, Irena. W pierwszym przypadku wagi Elektrimu i BRE nieustannie rosną przy jednoczesnym zmniejszaniu się wartości wag Uniwersalu i Efektu. Natomiast w drugim przypadku wartości wag Elektrimu i Ireny nieustannie rosną przy jednoczesnym zmniejszaniu się wartości wag BRE i Uniwersalu. Na uwagę zasługuje tutaj fakt, że stopień ryzyka mierzony np. odchyleniem standardowym stopy zwrotu jest znacznie wyższy w przypadku portfela Elektrim, BRE, Uniwersal, Efekt. Przykładowo dla przeciętnej stopy zwrotu wynoszącej 1% odchylenie standardowe wymienionego portfela jest już o ponad 50% większe niż portfela Elektrim, BRE, Uniwersal, Irena.

Tabela 1. Przykładowe portfele efektywne dla spółek Elektrim, BRE, Uniwersal, Irena

	Elektrim, BRE, Uniwersal, Irena						
L.p	$E(R_p)$	$\sigma^2_{MIN}(R_p)$	$S_{MIN}(R_p)$	x_1	x_2	x_3	x_4
1.	0,00556	0,006378	0,07986	0,10420	0,82756	-0,059778	0,128014
2.	0,006	0,006416	0,0801	0,11121	0,804943	-0,124744	0,208589
3.	0,0065	0,006546	0,08091	0,11923	0,779042	-0,19914	0,30086
4.	0,007	0,006771	0,08229	0,12726	0,753142	-0,273536	0,39313
5.	0,0075	0,007089	0,084196	0,13529	0,727241	-0,347932	0,485401
6.	0,008	0,007502	0,086614	0,14332	0,701341	-0,422328	0,577672
7.	0,0085	0,008012	0,08951	0,15134	0,67544	-0,496724	0,669942
8.	0,009	0,008615	0,092817	0,15937	0,64954	-0,57112	0,762213
9.	0,0095	0,009312	0,096499	0,16739	0,623639	-0,645516	0,854484
10.	0,01	0,010104	0,100519	0,17542	0,597738	-0,719912	0,946754

Źródło: Opracowanie własne.

Inną dodatkową trudnością jaką napotka inwestor zakupując akcje portfela (1) jest dokonywanie krótkiej sprzedaży akcji nie jednej, ale dwóch spółek (Uniwersal i Efekt) począwszy od przeciętnej stopy zwrotu wynoszącej 0,75%. W przypadku portfela (2)[11] należy krótko sprzedać jedynie akcje Uniwersalu.

[11] Zob. tab. 1.

Zatem inwestowanie w portfel (1) jest bardziej ryzykowne niż w portfel (2) i wymaga dodatkowo bardziej wzmożonej krótkiej sprzedaży.

Tabela 2. Przykładowe portfele efektywne dla spółek Elektrim, BRE, Uniwersal, Efekt

	Elektrim, BRE, Uniwersal, Efekt						
Lp.	$E(R_p)$	$\sigma^2_{MIN}(R_p)$	$S_{MIN}(R_p)$	x_1	x_2	x_3	x_4
1.	0,00521	0,00633	0,079561	0,13027	0,902225	0,079829	-0,112324
2.	0,006	0,007015	0,083756	0,264104	0,97464	0,045107	-0,28383
3.	0,0065	0,007696	0,087727	0,348788	1,021428	0,023136	-0,392352
4.	0,007	0,008916	0,094425	0,433473	1.066236	0,001166	-0,500874
5.	0,0075	0,010547	0,102699	0,518157	1.112044	-0,020805	-0,609396
6.	0,008	0,012578	0,112152	0,602842	1,157852	-0,042776	-0,717918
7.	0,0085	0,01501	0,122515	0,687526	1,20366	-0,064747	-0,82644
8.	0,009	0,017841	0,13357	0,772211	1,249468	-0,086717	-0,934962
9.	0,0095	0,021071	0,145159	0,856895	1,295277	-0,108688	-1,043484
10.	0,01	0,024701	0,157166	0,94158	1,341085	-0,130659	-1,152006

Źródło: Opracowanie własne.

Wnioski

Użycie powyższej metody do wyznaczenia zbioru portfeli efektywnych daje dość dobre możliwości analizowania udziału poszczególnych spółek w portfelach efektywnych. Pozwala to też na porównywanie różnych portfeli efektywnych i przyjęcie właściwej strategii inwestowania.

Literatura

1. Fichtenholz G., M., *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa 1985.
2. Haugen R., *Teoria nowoczesnego inwestowania*, WIG – Press Warszawa 1996.
3. Tarczyński W., *Rynki kapitałowe*, Agencja wydawnicza „PLACET", Warszawa 1997.

STRESZCZENIE

W pracy przedstawiony jest sposób znajdowania zbioru portfeli efektywnych na wybranych przykładach.

METHOD OF FINDING EFFICIENT PORTFOLIOS SET

SUMMARY

In the paper, a method is presented for finding efficient portfolios set on select examples.

Translated by H. Kowgier

Dr Henryk Kowgier
Uniwersytet Szczeciński
kowhen@onet.eu