Monika Wojnowska

Pojęcia matematyczne w klasach początkowych : wprowadzenie

Nauczyciel i Szkoła 1 (6), 99-103

1999

Monika Wojnowska

Pojęcia matematyczne w klasach początkowych — wprowadzenie

1. Problem swoistości pojęć matematycznych

Podstawowym składnikiem naszej wiedzy i budulcem naszego myślenia są pojęcia. Nasze sądy i sposoby postępowania składają się z pojęć. Pojęcia umożliwiają człowiekowi klasyfikowanie bytów i idei, wyprowadzanie reguł, stanowią podstawę logiczną dla naszego myślenia. To dzięki pojęciom człowiek nie musi reagować na każde zdarzenie, na każdą rzecz jak na coś jedynego w swoim rodzaju — potrafi dostrzec i zbudować naturalne i logiczne związki pomiędzy rozmaitymi zdarzeniami i przedmiotami składającymi się na jego doświadczenie.

1.1. W literaturze pedagogicznej nie mamy wielu opracowań dotyczących uczenia się pojęć, a te, które są, w większości dotyczą pojęć przyrodniczych, zasadniczo różnych od pojęć matematycznych.

Na czym polega swoistość matematyki? Jaka jest istota i geneza jej pojęć? Jaką rzeczywistość ujmują pojęcia matematyczne?

Problem, co jest przedmiotem matematyki, czym są obiekty, o których mówi, jest szeroko rozważany przez filozofię matematyki. Poglądy tam reprezentowane nie są jednolite. Ich zróżnicowanie wynika w szczególności z leżących u ich podłoża założeń filozoficznych dotyczących:

1) stosunku matematyki do doświadczenia i materialnego świata. Tutaj jedni widzą w matematyce odzwierciedlenie w postaci bardzo abstrakcyjnej rzeczywistości stosunków. Inni uważają, że dotyczy to tylko niektórych fragmentów matematyki, pozostałe są natomiast czystymi i swobodnymi tworami myśli. Jeszcze inni widzą w matematycznych pojęciach wrodzone kategorie umysłu, idee (względnie formy), które światu służyły za wzór.
2) roli uprawiającego matematykę podmiotu. Opozycją podstawową jest tu przeciwstawienie poglądu, zgodnie z którym obiekty matematyczne są wytworem samych matematyków (człowiek jako twórca), poglądowi, że obiekty te są niezależne od poznającego podmiotu odkrywającego je w trakcie badań (człowiek jako odkrywca).

Nie wnikając głębiej w różnorodne stanowiska filozoficzne, przedstawmy krótko tylko przykłady poglądów ważnych dla naszych dalszych rozważań. Takim klasycznym przykładem, dobrze ilustrującym omawiany problem, który wywarł największy wpływ na nasze współczesne przekonania, są poglądy Platona i Arystotelesa.[1]

U podstaw systemu filozoficznego Platona leży teoria idei. Według niej istnieją dwa rodzaje bytu, tworzące dwa odrębne światy — niezmienne idee istniejące poza czasem i przestrzenią oraz zmienne rzeczy postrzegane za pomocą zmysłów, mniej realne niż idee. Idee istnieją prawdziwie, rzeczy zaś co najwyżej stają się. Rzeczy są odbiciami, cieniami idei, idee są wzorami rzeczy. Porządek świata realnego jest odwzorowaniem porządku panującego w świecie idei.

Stosując tę ontologię do matematyki, przedmioty matematyki zaliczył Platon do świata idei. Jego zdaniem istnieją określone obiekty niezależne od czasu, przestrzeni i umysłu ludzkiego, które nazywamy „jeden", „dwa", „trzy", itd. — a więc idee arytmetyczne; istnieją także takie jak „prosta", „punkt", „okrąg" — a więc idee geometryczne. Matematyka opisująca je i wykrywająca związki między nimi jest nauką o ideach. W konsekwencji w matematyce mamy do czynienia nie z tworzeniem, a z odkrywaniem: matematyk nie tworzy przedmiotów, tylko odkrywa je i opisuje. To decyduje, że podstawą poznania matematycznego jest rozum, a właściwą metodą matematyki — metoda aksjomatyczna. Matematyka ma charakter pojęciowy i choć czasem nawiązuje do obserwacji i posługuje się myśleniem obrazowym, jest to jednak tylko okazją do uświadomienia sobie pojęć, a nie podstawą do ich wytworzenia. Matematyk, zdaniem Platona, przypomina sobie tylko w ten sposób pojęcia odwołując się do wrodzonej wiedzy o ideach; „dusza ponownie uprzytomnia sobie to, co już kiedyś widziała, a mianowicie w swej preegzystencji przed wypędzeniem do ciała, kiedy to mogła «okiem ducha» bezpośrednio oglądać idee" (H. Schnädelbach, 1995).

Takie ujęcie matematyki pozwala też Platonowi wyjaśnić związek między matematyką czystą a matematyką stosowaną. Otóż twierdzenia matematyki stosują się do rzeczy świata realnego, gdyż te ostatnie są podobne do idei jako do swych wzorców. „Matematyka jest więc opisem pewnych faktów, które nie zależą ani od czasu, ani od przestrzeni, ani od poznającego umysłu. Nawet gdyby nie było na świecie żadnego człowieka, to i wtedy istniałby świat liczb, figur geometrycznych i innych tworów matematycznych oraz wzajemne ich zależności — choć nie byłyby one opisane w żadnym języku i nie istniałaby matematyka jako zbiór definicji i twierdzeń. Matematyk staje zatem wobec danej, wiecznej, niezależnej i niezmiennej rzeczywistości (przedmiotów matematycznych) i jego zadaniem jest rzeczywistość tę opisać (R. Murawski, 1995).

[1] Platon (427–347 p.n.e.) uczeń Sokratesa; Arystoteles (384–322 p.n.e.) twórca logiki, uczeń Platona.

Arystoteles, akceptując pewne zasady Platona, wychodząc od tych samych problemów, nie akceptował platońskiej nauki o ideach. Według niego matematyka nie jest nauką o niezależnych bytach idealnych, w stosunku do których świat rzeczy jest wtórny, ale jest nauką o obiektach (nazywanych przez niego obiektami matematycznymi) wydobywanych z rzeczy na drodze abstrakcji.

Będąc rezultatem abstrakcji obiekty matematyczne istnieją jako szczególnego rodzaju formy (pojęciowe). Wydzielone stanowią one rzeczywistość myślową, są zakorzenionymi w przedmiotach konkretnych wytworami twórczej pracy umysłu. Twierdzenia matematyczne, zdaniem Arystotelesa, mówią o formach i stosunkach formalnych wyabstrahowanych z konkretnych obiektów. „Matematyk rozpatruje swoje obiekty ogołociwszy je z takich własności jak lekkość, twardość... i zatrzymuje się tylko nad tym, co jest wielkością i rozciągłością... badając raz położenie jednych względem drugich i fakty, które stąd wynikają, innym razem ich wspólmierności i niewspólmierności, jeszcze kiedy indziej ich stosunki" (Arystoteles, cyt. za R. Murawski, 1995).

Wyodrębniona z rzeczy forma była dla Arystotelesa najważniejsza. Pojmował ją jako realny odpowiednik pojęcia. Forma zajęła w jego filozofii to miejsce, które u Platona zajmowała idea. Jak pisze W. Tatarkiewicz — „...Platon od razu od absolutu zaczął; Arystoteles zaczął od badania fizycznego świata, by przezeń dojść do absolutu" (W. Tatarkiewicz, 1981).

Dalszy rozwój filozofii matematyki przyniósł dużą różnorodność poglądów, w omawianej kwestii zbliżonych do jednego z przedstawionych stanowisk, nie dokonując żadnych w tej mierze rozstrzygnięć.[2]

W nauczaniu matematyki oba te podejścia — pozostawiając otwarte kwestie metafizyczne — są ważne i użyteczne. Znajdujemy je obecne w wielu naszych poglądach do dziś. Przekonanie, że tego, co prawdziwe, należy poszukiwać nie w zmysłowym świecie zewnętrznym, ale tylko w samym myśleniu, jest platonizmem. Dla arystotelizmu natomiast znamienna jest pewność, że w doświadczeniu zmysłowym można znaleźć przynajmniej punkty zaczepienia dla poznania tego, co prawdziwe.

Musimy tutaj stwierdzić, że niezależnie od założeń filozoficznych, scharakteryzowanie przedmiotu matematyki nie jest łatwe. Szybko rozwijająca się i przekształcająca matematyka umyka wszelkim próbom jej zadowalającego zdefiniowania.

Rozwijając się coraz bardziej w kierunku ogólnej nauki o strukturach, staje się coraz bardziej wielowątkową nauką abstrakcyjną.

Przy tym uważa się, że jeżeli podstawowe struktury matematyczne są formami rzeczywistości „opróżnionymi" z ich zawartości konkretnej, to struktury tworzone

[2] Uważa się, że platonizm jest zwykłym poglądem pracującego matematyka (*Mała encyklopedia logiki*, 1981). „Między duchem a materią pośredniczy matematyka" — mówił H. Steinhaus, godząc jakby oba kierunki, różniące się w swoim „akcie wiary".

przez współczesnych matematyków w postaci teorii aksjomatycznych są potencjalnymi formami rzeczywistości, w tym znaczeniu, że w zastosowaniach mogą być wypełniane różnymi treściami (mówimy również: zinterpretowane).

1.2. W nauczaniu początkowym matematyki uczymy pojęć elementarnych. *Za elementarne uznajemy każde pojęcie matematyczne, które może być wyabstrahowane w drodze bezpośredniej, naturalnej matematyzacji znanych już uczniowi dobrze stosunków rzeczywistych, bądź zilustrowane w prosty sposób w dziedzinie elementarnej naiwnej matematyki i propedeutycznej geometrii* (Z. Krygowska, 1977).

1.3. Pojęcia matematyczne należą do pojęć abstrakcyjnych. Podział na pojęcia konkretne i pojęcia abstrakcyjne jest najważniejszym podziałem dla nauczania matematyki. Logika mówi, że pojęcia konkretne to takie, których nazwy wskazują na rzeczy (np. „krzesło", „piłka", „pudełko") albo osoby (np. „nauczyciel", „uczeń") albo na coś, co wyobrażamy sobie jako osobę fizyczną lub rzecz. Ogólnie można powiedzieć, że pojęcia konkretne to takie, których przykłady można wskazać; jak mówi Gagné (1970): „ich znaczenie można wyjaśnić wskazując je palcem: są to pojęcia ukształtowane w drodze obserwacji". Należy uściślić: bezpośredniej obserwacji. Pojęcia abstrakcyjne natomiast to takie, których przykładów nie można wskazać lub doświadczyć wprost. Zazwyczaj wymagają one definicji słownej. Wskazują najczęściej na pewną cechę (np. „białość", „prostokątność"), na pewne zdarzenie czy stan rzeczy (np. „płacz", „cisza", „sprawiedliwość") albo na pewien stosunek między przedmiotami (np. „większość", „odległość", „bliskość"). Objaśnienie bądź zilustrowanie sensu takich pojęć wymaga użycia słów lub czynności. „Podczas gdy parametrami pojęć konkretnych są zazwyczaj fizyczne atrybuty przedmiotów, których uczniowie mogą doświadczać wprost, pojęcia abstrakcyjne na ogół nie są bezpośrednio dostępne naszym zmysłom". Ich sens „trudno opisać inaczej niż za pomocą określeń słownych, ilustracji bądź pokazu" (C. Galloway, 1988).[3]

1.4. Wprowadzanie nowego pojęcia i włączanie go w zespół innych, znanych już uczniowi, może odbywać się w oparciu o dwie zasadnicze drogi:

— wprowadzenie nowego pojęcia dzięki definicji podanej przez nauczyciela lub podręcznik, zilustrowanej odpowiednimi przykładami,

[3] To, że pojęcia matematyczne mogą być (i w nauczaniu początkowym są) interpretowane w bezpośredniej rzeczywistości konkretnej, nie czyni z nich pojęć konkretnych. Przedmiot może być „okrągły", „kwadratowy", „trójkątny", ale nie czyni to z niego „koła", „kwadratu", „trójkąta". Podejście platońskie (rzeczy są cieniami idei) znacznie ułatwia rozumienie swoistości stosunku między abstrakcyjnymi przedmiotami matematyki a ich konkretnymi modelami w materialnej rzeczywistości (chociaż sama zasada abstrakcji pochodzi od Arystotelesa).

— wprowadzenie nowego pojęcia przez taką organizację aktywności ucznia, że on sam to pojęcie przy pewnej pomocy nauczyciela konstruuje i następnie definiuje.

Obie te drogi są równie ważne dla rozwoju matematycznego myślenia uczniów. Pierwszą z nich, wykorzystującą tok dedukcyjny — częściej stosujemy w klasach starszych. Druga droga, dydaktycznie znacznie trudniejsza, wykorzystująca tok indukcyjny — jest charakterystyczna dla klas początkowych. Droga ta, w której konstruowanie pojęcia znacznie wyprzedza jego definicję, jako punkt wyjścia przyjmuje intuicyjne ujęcie przez ucznia stosunków w materialnej rzeczywistości. Droga ta bywa najczęściej ukierunkowana na określoną definicję matematyczną, jednak nie musi być taką definicją zamknięta. W nauczaniu szkolnym często poprzestajemy na tym, co można by nazwać opisem lub wyjaśnieniem definicyjnym. W nauczaniu początkowym uczeń przebywa jedynie początkowy etap tej drogi, nastawiony na tworzenie dla pojęć matematycznych bardzo szerokiej bazy intuicyjnej.

Opracowanie toku postępowania dydaktycznego, którego celem byłoby kształtowanie pojęć matematycznych w ten naturalny, oparty na doświadczeniach i intuicji sposób, wymaga pogłębionej refleksji psychologicznej i dydaktycznej.

Temu problemowi poświęcona będzie druga, osobna część artykułu.

Literatura

Gagné R.M., *The Conditions of Learning*, New York 1970.
Galloway C., *Psychologia uczenia się i nauczania*, Warszawa 1988.
Krygowska Z., *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. 1., Warszawa 1977.
Mała encyklopedia logiki, Wrocław 1988.
Murawski R., *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*. Poznań 1986.
Murawski R., *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*. Warszawa 1995.
Tatarkiewicz W., *Historia filozofii*, tom 1, Warszawa 1990.
Schnädelbach H., *Filozofia*, [w:] E. Martens, H. Schnädelbach (red.), *Filozofia. Podstawowe pytania*. Warszawa 1995.