

Grigorian, Aszot

Prace M. W. Ostrogradskiego w zakresie matematyki

Kwartalnik Historii Nauki i Techniki 21/1, 39-42

1976

Artykuł umieszczony jest w kolekcji cyfrowej Bazhum, gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych tworzonej przez Muzeum Historii Polski w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego.

Artykuł został zdigitalizowany i opracowany do udostępnienia w internecie ze środków specjalnych MNiSW dzięki Wydziałowi Historycznemu Uniwersytetu Warszawskiego.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach dozwolonego użytku.



Aszot Tigranowicz Grigorian (Moskwa)

PRACE M. W. OSTROGRADSKIEGO W ZAKRESIE MATEMATYKI

Prace z dziedziny matematyki — znakomitego uczonego rosyjskiego pierwszej połowy XIX w. Michaiła Wasiliewicza Ostrogradskiego (1801—1861) zawierają bardzo szeroki krąg zagadnień dotyczących analizy, algebry i rachunku prawdopodobieństwa. Najważniejsze z nich, związane ściśle z pracami Ostrogradskiego z zakresu fizyki i mechaniki matematycznej, odnoszą się do rachunku wariacyjnego i całkowego.

Ważne zadania rachunku wariacyjnego — problem przeprowadzenia krzywej w taki sposób, aby punkt poruszający się pod wpływem działania siły ciężkości wzdłuż tej krzywej najszybciej przebył drogę od jednego punktu do drugiego, problem znalezienia najkrótszej krzywej między dwoma danymi punktami na danej powierzchni oraz inne — zostały wysunięte i rozwiązane na przełomie XVII i XVIII w. L. Euler (1707—1783) i J. L. Lagrange (1736—1811) opracowali ogólne metody rozwiązywania zadań wariacyjnych, sprowadzających się do znalezienia ekstremów zwykłych całek oznaczonych, których wyrażenie podcałkowe zawiera pewną funkcję nieznaną. W szczególności Euler wprowadził niezbędny warunek, któremu powinna odpowiadać taka funkcja, w postaci równania różniczkowego, nazywanego obecnie jego imieniem. A. Legendre (1752—1833) sformułował warunek wyznaczający dla istnienia ekstremum.

Rozwój fizyki matematycznej — teorii włośkowatości, teorii przewodnictwa ciepła, teorii potencjału — wymagał metod rozwiązywania zadań na ekstrema całek powierzchniowych i potrójnych. Jako przykład zagadnienia tego rodzaju może służyć zadanie: znaleźć równanie powierzchni swobodnej cieczy, zawartej w naczyniu, gdy znajduje się ona w stanie równowagi. Jednak nawet wyznaczenie ekstremum poszczególniej konkretnej całki podwójnej przedstawiało duże trudności i słusznie uważane było za poważny wkład do teorii rachunku wariacyjnego. Pierwszy rozwiązał zadanie tego rodzaju C. F. Gauss (1777—1855) w roku 1830. W roku 1835 Ostrogradski opublikował bardzo doniosłą pracę pt. *Rachunek wariacyjny całek wielokrotnych*.

W publikacji tej przedstawił najogólniejsze wyrażenie wariacji całki wielokrotnej, gdy do wyrażenia podcałkowego wchodzi funkcje wielu zmiennych oraz ich pochodne cząstkowe dowolnego rzędu. Ostrogradski wskazuje przy tym na błąd, popełniany dawniej przez matematyków przy obliczaniu wariacji pochodnych cząstkowych funkcji o wielu zmiennych i stwierdza, że przy wyprowadzaniu wariacji całki wielokrotnej nie ma żadnej potrzeby stosowania zmiennych pomocniczych.

Praca Ostrogradskiego, która wydana była w Petersburgu w języku francuskim, została w 1836 roku przedrukowana w Berlinie¹ a w

¹ „Journ. Für die reine und ang. Mathematik”. Berlin 1836 Bd. 15 s. 332—354.

roku 1861 opublikowana w przekładzie angielskim w książce J. Todhuntera, przedstawiającej historię rachunku wariacyjnego².

Do rachunku wariacyjnego Ostrogradski powracał wielokrotnie. Znaczna część największej jego pracy *O równaniach różniczkowych, odnoszących się do zagadnienia izoperymetrycznego*, przedstawionej Akademii Nauk w roku 1848 i opublikowanej w roku 1850 dotyczy rachunku wariacyjnego. W pracy tej Ostrogradski rozszerza wyniki irlandzkiego uczonego W. Hamiltona, uzyskane dla potrzeb dynamiki, na dowolne zadania wariacyjne (które z powodu ich historycznego pochodzenia zostały w wieku XIX nazwane izoperymetrycznymi³).

W tej samej pracy (jak również w niektórych pracach z zakresu mechaniki) Ostrogradski zwracał szczególną uwagę na niezależność wyrażen oznaczonych (nawiasów Poissona) od doboru układu współrzędnych. Do okoliczności tej Ostrogradski przywiązywał duże znaczenie: idea niezmienniczości względem grupy przekształceń stanowiła podstawę nie tylko teorii Hamiltona — Jacobiego w mechanice, lecz okazała się jedną z podstawowych idei w matematyce XIX w.

Drugie ważne stwierdzenie, które jak uważał Ostrogradski, zawiera całą mechanikę i cały rachunek wariacyjny, zbliżone jest do podstawowej myśli tak zwanego twierdzenia niezależności, udowodnionego w roku 1901 przez D. Hilberta. Jest to stwierdzenie o całkowalności wariacji wyrażenia podcałkowego. Ostrogradski wyraźnie dostrzegał wszystkie następstwa, które z niego wynikają i zapewnił sobie pierwszeństwo odkrycia tego twierdzenia w piśmie do N. D. Bradzmana⁴.

Opracowanie rachunku wariacyjnego w pracach Ostrogradskiego było nierozzerwalnie związane z wyjaśnieniem samych jego podstaw oraz uściśleniem pojęcia wariacji. W pierwszej połowie XIX w. zagadnienie to nie wywoływało takiego silnego zainteresowania, jak później, gdy w pracach K. Weierstrassa (1815—1897) i Schäfera (1859—1885) stwierdzono, że klasa dopuszczalnych wariacji wpływa w istotny sposób na problem wariacyjny. Ostrogradski każdorazowo specjalnie się zatrzymuje na pojęciu wariacji funkcji i wszędzie wprowadza je w sposób maksymalnie jasny i dokładny. Taką ostrożność można było ocenić tylko po pewnym czasie.

W związku z pracami nad fizyką matematyczną i rachunkiem wariacyjnym Ostrogradski poważnie wzbogacił ogólną teorię całek wielokrotnych. W pracy *Przyczynek do teorii ciepła* wyprowadził i zastosował wzór przekształcenia całki potrójnej rozciągniętej na określonej przestrzeni, w całość powierzchniową po powierzchni ograniczającej tę przestrzeń. Ten wzór Ostrogradskiego stał się jednym z kamieni węgielnych nauki o całkach wielokrotnych i wszedł później do wszystkich podręczników naukowych. Jego znaczenie dla mechaniki można zrozumieć chociażby na podstawie tego, że umożliwia on obliczenie wielkości strumienia płynu, wypływającego w określonym czasie z pewnej przestrzeni przez jej powierzchnię graniczną, zarówno na podstawie wydajności źródeł płynu wewnątrz tej przestrzeni, jak i na

² J. Todhunter: *A history of the progress of the calculus of variations during the nineteenth century*. Cambridge 1861 s. 111—139.

³ Już starożytni Grecy rozwiązyali, na przykład, zadanie znalezienia wśród krzywych płaskich zamkniętych o danym obwodzie (figur izoperymetrycznych) takiej krzywej, która by ograniczała największe pole; jest nią okrąg koła.

⁴ M. W. Ostrogradski: *Izbrannyye trudy*. Moskwa: Izdatielstwo AN SSSR 1958 s. 315.

podstawie prędkości cząstek płynu w momencie przepływania przez powierzchnię graniczną. W pracy *O rachunku wariacyjnym całek wielokrotnych* Ostrogradski uogólnił ten wzór na całki dowolnej krotności: było mu to potrzebne przy wyprowadzaniu wariacji całki n -krotnej.

W teje pracy z roku 1834 Ostrogradski prawie jednocześnie z Jacobim (1833) zajął się zagadnieniem zamiany zmiennych w całce n -krotnej. W artykule *O przekształceniu zmiennych w całkach krotnych* (1836) Ostrogradski zaproponował nową metodę wyprowadzenia wzoru na zmianę zmiennych w całce podwójnej, opierającą się na prostych pojęciach geometrycznych, które wyjaśniają samą istotę rzeczy. Metodę tę wykłada się obecnie w podręcznikach analizy matematycznej.

Wiele artykułów Ostrogradskiego, napisanych w latach 1833—1845, dotyczy teorii całkowania funkcji algebraicznych: zagadnienia ich całkowalności w funkcjach elementarnych oraz ustalania rodzajów całek, jeżeli są one wyrażane przez funkcje elementarne. Powyższe prace Ostrogradskiego zbliżone są do znakomitych badań Norwega N. Abela (1802—1829). Wymieńmy tylko jedno rozwiązanie Ostrogradskiego, zawarte w pracy *O całkowaniu ułamków prostych*, zreferowanej w roku 1844 i wydrukowanej w roku 1845. Jest to metoda oznaczenia algebraicznej części całki ułamka wymiennego, nie wymagająca uprzedniego obliczania pierwiastków wielomianu w mianowniku i czynności całkowania. Również tę metodę Ostrogradskiego można obecnie znaleźć we wszystkich wykładach analizy.

Ostrogradski wniósł wielki wkład do nauki o równaniach różniczkowych z pochodnymi cząstkowymi. Uczony zostawił także trwałe ślady w opracowaniu teorii równań różniczkowych zwyczajnych.

W niedużej pracy *Uwagi o równaniach różniczkowych liniowych* przedstawionej Akademii Nauk w roku 1838 i wydrukowanej w roku następnym, Ostrogradski wyprowadził jedno z podstawowych twierdzeń ogólnej teorii równań różniczkowych liniowych — wzór, wyrażający wyznacznik Wronskiego danego równania przez pewien jego współczynnik.

Interesujące są także inne, nieco wcześniejsze *Uwagi o metodzie kolejnych przybliżeń* (1835). Ostrogradski udoskonalił w nich sposób przybliżonego rozwiązania równań różniczkowych nieliniowych, podanych przez Newtona. W metodzie Ostrogradskiego (rozkładu rozwiązania w szereg względem pewnego małego parametru) są zaczątki metod współczesnej teorii drgań nieliniowych, która się obecnie szeroko rozwinęła i znalazła niezwykle ważne zastosowanie w nauce i technice.

Ostrogradski żywo się interesował algebrą i teorią liczb. W roku 1836 wygłosił on w Morskim Korpusie Kadetów obszerny publiczny cykl wykładów z tych przedmiotów, który został opublikowany w oparciu o notatki słuchaczy S. Burczaka i S. Zielenego pod tytułem *Wykłady z analizy algebraicznej i przestępnej, w dwóch częściach* (1837). Pierwsza część poświęcona jest rozwiązaniu równań algebraicznych, druga — teorii funkcji algebraicznych; razem zawierają one prawie 1000 stron. Chociaż algebra znajdowała się nieco na uboczu od głównych zainteresowań Ostrogradskiego, w pełni przyswoił on sobie wszystkie najnowsze osiągnięcia w tej dziedzinie, w tym również wynik nikomu wówczas nie znanych, przez nikogo nie docenianych prac E. Galois'a

(1811—1832) z teorii grup. W pełni ocenił Ostrogradski także znaczenie podstawowych prac M. Abela w zakresie ogólnej teorii równań algebraicznych i przedstawił oryginalny dowód słynnego twierdzenia Abela (1824) o niemożliwości rozwiązania w postaci ogólnej dowolnego równania stopnia piątego i wyższych za pomocą skończonej liczby działań algebraicznych.

Szereg wykładów kursu poświęcono teorii liczb. Był to pierwszy w Rosji systematyczny kurs matematyki. Stał on na wysokim poziomie (obejmował, na przykład, teorię dwumianowych równań Gaussa). Między innymi wykłady omawiały tablicę pierwiastków liczb pierwszych, mniejszych od 200, o której pochlebnie się później wyraził P. L. Czebyszew w swojej *Teorii równań* (1849).

W teorii prawdopodobieństwa i statystyce matematycznej uwagę Ostrogradskiego zwracały poszczególne zagadnienia o charakterze praktycznym. Przykładem może tu być artykuł z 1846 r., przedmiotem którego jest kontrola jakości produkcji przemysłowej za pomocą metody wyrzykowej. Zapewne zainteresowanie teorią prawdopodobieństwa powstało u Ostrogradskiego w wyniku pracy w komisji ubezpieczeń, gdzie on razem z W. J. Buniakowskim (1804 — 1889) mieli za zadanie przeprowadzić wszystkie niezbędne obliczenia do przepisów o kasach emerytalnych.

Kończąc krótki przegląd prac matematycznych M. W. Ostrogradskiego należy podkreślić, że ich cechą charakterystyczną jest wysuwanie i głębokie ujmowanie zagadnień podstawowych. Ostrogradski interesował się prawie wszystkimi aktualnymi problemami matematyki swych czasów. Nierzadko się zdarzało, że on i jego współcześni uzyskiwali — niezależnie od siebie — identyczne lub podobne wyniki, w innych przypadkach Ostrogradski pierwszy dokonywał odkryć, które z kolei powtarzali inni.

A. T. Григорьян

РАБОТЫ М. В. ОСТРОГРАДСКОГО ПО МАТЕМАТИКЕ

В статье освещается вклад крупнейшего русского учёного первой половины XIX в. М. В. Ostrogradского в области различных разделов математики. Он является автором многих важных исследований по вариационному исчислению и математическому анализу. В статье показано, что основополагающие труды Ostrogradского примыкают к замечательным исследованиям Л. Эйлера (1707—1783), Ж. Л. Лагранжа (1736—1813), К. Ф. Гаусса (1777—1855), У. Р. Гамильтона (1805—1865), К. Якоби (1804—1851), К. Вейерштрасса (1815—1897), Н. Абеля (1802—1829) и др.

A. T. Grigorian

L'OEUVRE DE M. W. OSTROGRADSKI DANS LE DOMAINE DES MATHÉMATIQUES

Dans l'article, on a présenté l'apport d'éminent savant russe de la première moitié du XIX^e siècle, M. W. Ostrogradski, dans le domaine des mathématiques. Il était l'auteur de plusieurs recherches fondamentales concernant le calcul de variation et l'analyse mathématique. Dans l'article, on a démontré que les plus importantes recherches de Ostrogradski ressemblent aux remarquables découvertes de L. Euler (1707—1783), J. L. Lagrange (1736—1813), C. F. Gauss (1777—1855), W. R. Hamilton (1805—1865), C. Jacobi (1804—1851), K. Weierstrass (1815—1897), N. Abel (1802—1829) et des autres.