Agnieszka Bitner

Rozkład jednostkowych cen nieruchomości gruntowych

Acta Scientiarum Polonorum. Administratio Locorum 8/4, 41-50

2009

Artykuł został opracowany do udostępnienia w internecie przez Muzeum Historii Polski w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego. Artykuł jest umieszczony w kolekcji cyfrowej bazhum.muzhp.pl, gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach dozwolonego użytku.

MUZEUM HISTORII POLSKI

ACTA SCIENTIARUM POLONORUM
Acta Sci. Pol., Administratio Locorum 8(4) 2009, 41-50

ROZKŁAD JEDNOSTKOWYCH CEN NIERUCHOMOŚCI GRUNTOWYCH

Agnieszka Bitner
Uniwersytet Rolniczy w Krakowie

Streszczenie. W pracy określono postać funkcyjną rozkładu cen jednostkowych nieruchomości gruntowych niezabudowanych. Analizę przeprowadzono dla bazy danych obejmującej 1752 transakcje dokonane w Krakowie. Pokazano, że na bardzo wysokim poziomie istotności rozkład cen jednostkowych jest zgodny z rozkładem logarytmiczno-normalnym. Otrzymany wynik sugeruje, że rozkład cen jednostkowych jest opisany taką samą funkcją jak rozkład małej i średniej wielkości bogactwa w społeczeństwie.

Słowa kluczowe: wycena nieruchomości, rozkład logarytmiczno-normalny, rozkład cen, cena jednostkowa nieruchomości, rozkład bogactwa, nieruchomość gruntowa, rynek finansowy

WSTĘP

Metody statystyczne w wycenie nieruchomości i analizach rynku nieruchomości są coraz częstszym narzędziem uczestników tego rynku. Dostępność danych oraz ilość informacji, którą one zawierają, umożliwia szczegółową analizę zachowań rynku. Artykuł ten dotyczy jednego zagadnienia – rozkładu jednostkowych cen transakcyjnych nieruchomości gruntowych niezabudowanych. Zarówno z powodów praktycznych – do wyceny nieruchomości, jak również ze względów teoretycznych, badanie własności rozkładu cen nieruchomości jest zasadne i dostarcza istotnych informacji o rynku nieruchomości.

Znajomość postaci funkcyjnej rozkładu cen jest potrzebna rzeczoznawcom, ponieważ stosowane w wycenie testy statystyczne zakładają często rozkład normalny cechy. Są to na przykład test dla wariancji w populacji, test jednorodności wielu wariancji czy test analizy wariancji. Wyznaczanie przedziału ufności dla współczynnika korelacji, test istotności dla współczynnika regresji liniowej czy współczynnika korelacji wymagają również spełnienia założenia, że rozkład cech jest normalny. Jeśli badane cechy nie spełniają tego założenia, stosowanie testu jest błędem. Wyznaczając przedział ufności dla wartości średniej zmiennej jednowymiarowej, na przykład dla średniej ceny, korzysta się z parametrów dla rozkładu normalnego cechy. W wielu publikacjach dotyczących zastosowania

Adres do korespondencji – Corresponding author: Agnieszka Bitner, Zakład Zastosowań Matematyki, Uniwersytet Rolniczy, Al. Mickiewicza 24/28, 30-059 Kraków, e-mail: rmbitner@cyf-kr.edu.pl

metod statystycznych w wycenie [Hozer i in. 2002, Gnat 2008] przedstawiono histogramy cen różnego typu nieruchomości. W większości przykładów są to rozkłady prawoskośne, a nie symetryczne. Z tego powodu przed zastosowaniem bardziej zaawansowanych narzędzi statystycznych należy zbadać postać funkcyjną rozkładu cen.

Z kształtem rozkładu wiąże się również inna ważna kwestia (mająca duże znaczenie w trakcie wyceny nieruchomości), a mianowicie czy wartość średnia jest dobrym reprezentantem cen w analizie rynku. Dla rozkładów niesymetrycznych dokładniejszą informację o poziomie cen występujących na rynku daje wartość modalna (wartość najbardziej prawdopodobna). Cytowane prace [Hozer i in. 2002, Gnat 2008] wskazują, że rozkład cen nie zawsze jest symetryczny. Znajomość funkcji rozkładu cen pozwoliłaby zatem na precyzyjne określenie wartości modalnej na podstawie parametrów rozkładu.

Rozkładem cen transakcyjnych nieruchomości są zainteresowani również uczestnicy innych rynków, w szczególności rynków finansowych. Określenie funkcji rozkładu cen transakcyjnych nieruchomości dostarczyć może bowiem informacji o procesach generujących ten rozkład, co z kolei pozwala lepiej zrozumieć mechanizmy rządzące rynkiem. Istnieje wiele opracowań ekonomicznych dotyczących wartości taksacyjnych działek gruntowych [Ishikawa 2006, Kaizoji i Kaizoji 2004, Kaizoji 2003, Oshiro 2003]. Ishikawa [2006] i Kaizoji [2003] pokazali, że rozkład wartości taksacyjnych jednostki (1 m^2) gruntu jest zgodny z rozkładem potęgowym. W tym kontekście warto przytoczyć wyniki dotyczące rozkładu bogactwa w społeczeństwie, które zostały opisane przez Pareto [1897] i Gibrata [1931]. Pierwszy z cytowanych autorów, ekonomista Vilfredo Pareto, odkrył pod koniec dziewiętnastego wieku, że rozkład dużych fortun w społeczeństwie jest zgodny z rozkładem potęgowym. To znaczy, że funkcja rozkładu bogactwa, w, ma postać $f(w) \sim w^{-\beta}$. Wykładnik β zwany jest również indeksem Pareto i przyjmuje wartości z przedziału $1 \leq \beta \leq 2{,}5$ [Pareto 1897, Levi i Solomon 1997, Souma 2002, Ishikawa 2006]. Odnotujmy, że potęgowy charakter funkcji dystrybucji $f(w)$ oznacza, że większość bogactwa całego społeczeństwa jest w posiadaniu małej grupy osób, podczas gdy większość ludzi posiada jedynie niewielką jego część. Jak jednak wskazują wyniki ostatnich badań, prawo Pareto opisuje tylko część rozkładu i stosuje się do „dużych" wartości bogactwa. W ogólności dystrybucja bogactwa (dochodu) podlega bardziej złożonemu rozkładowi [Bordley i in. 1996, Souma 2002]. Już w roku 1931 Robert Gibrat opublikował pracę dotyczącą dystrybucji „małych i średnich" majątków. Okazało się, że jest ona zgodna z rozkładem logarytmiczno-normalnym (log-normalnym), którego własności omawiane są w dalszych częściach artykułu. Rozkład log-normalny jest bardzo powszechny w ekonomii. Opisuje on na przykład rozkład produktu krajowego brutto krajów świata [Clauset i in. 2009, Limpert i in. 2001, Mitzenmacher 2003], rozkład dochodów osobistych [Kalecki 1945, Champernowne 1953], rozkład wielkości firm [Amaral i in. 1997, Ganugi i in. 2004, Growiec i in. 2008, Ishikawa 2008, Stanley i in. 1996] czy rozkład wielkości gospodarstw rolnych [Allanson 1992]. Należy odnotować, że w minionych dekadach rozkład log-normalny również odkryto w wielu innych dziedzinach [Crow 1988, Fiałkowski i Bitner 2008], takich jak fizyka, ekologia, geologia, astronomia, medycyna, inżynieria środowiska, geodezja czy lingwistyka.

Praca ta ma dwa cele. Określenie postaci funkcyjnej rozkładu jednostkowych cen transakcyjnych nieruchomości gruntowych niezabudowanych oraz wykazanie, że rozkład cen transakcyjnych nieruchomości odzwierciedla dystrybucję bogactwa lokalnej społeczności.

WYNIKI ANALIZY

Baza danych

Dane transakcyjne pochodzą z aktów notarialnych dotyczących umów kupna-sprzedaży nieruchomości gruntowych niezabudowanych położonych w granicach administracyjnych miasta Krakowa, zawartych w latach 1996–1999. W przedstawionej analizie uwzględniono jedynie grunty o przeznaczeniu M4 pod niską zabudowę mieszkaniową. Grunty o tym przeznaczeniu są najczęstszym przedmiotem transakcji. Ich udział w rynku wynosił 37,23%. Z bazy usunięto jedynie transakcje dokonane w warunkach szczególnych (w ramach przetargu) oraz działki, dla których wydano pozwolenie na budowę. W analizie nie uwzględniono również transakcji dotyczących nieruchomości sprzedanych jako dopełnienie sąsiedniej nieruchomości, działki-drogi, działki wydzielonej pod rurociąg gazowy, działki z linią wysokiego napięcia. Ostatecznie, po opisanych redukcjach, analizą objęto 1777 danych transakcyjnych. Ceny nieruchomości sprowadzono na dzień ostatniej transakcji w bazie. Zastosowano przy tym wskaźnik trendu wzrostu cen, opisany szczegółowo w pracach Bitner [2002a, 2003].

Rozkład cen jednostkowych gruntów – analiza statystyczna danych

Wyjściowy zbiór 1777 danych transakcyjnych obejmował ceny jednostkowe, c, zmieniające się w przedziale od $c_{\min} = 1{,}03$ do $c_{\max} = 1428{,}83$ PLN m^{-2}. Do analizy wykorzystano 1752 transakcje, w których ceny jednostkowe nie przekraczały 500 PLN m^{-2}. Pozostałych 25 transakcji – stanowiących około 1% bazy – odrzucono. Nie dało się ich bowiem pogrupować w odpowiednio liczne klasy cenowe. Celem analizy było przetestowanie hipotezy H_0, że rozkład cen jednostkowych, $f(c)$, jest opisany przez rozkład log-normalny dany wzorem

$$f(c) = \frac{1}{c\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\ln^2(c/\mu)}{2\sigma^2} \right) \tag{1}$$

Rozkład log-normalny jest określony tylko dla dodatnich wartości zmiennej c i jest rozkładem asymetrycznym, skośnym prawostronnie. Jednoznacznie charakteryzują go dwa parametry: średnia, μ, oraz odchylenie standardowe, σ, zmiennej $\ln(c)$.

W celu zweryfikowania hipotezy o zgodności obserwowanego rozkładu cen jednostkowych z rozkładem log-normalnym przeprowadzono test zgodności chi-kwadrat Pearsona. Wartość statystyki χ^2 liczona była ze wzoru [Aczel 2000]:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \tag{2}$$

gdzie O_i to wartość obserwowana będąca liczbą cen w i-tym przedziale; E_i jest odpowiadającą wartością teoretyczną (oczekiwaną), która wynika z hipotezy. Liczba n jest równa liczbie przedziałów, na które został podzielony przedział zmienności cen jednostkowych. Wartość teoretyczną liczono według wzoru:

$$E_i = \frac{N}{c_i \sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\ln^2(c_i/\mu)}{2\sigma^2} \right) \tag{3}$$

gdzie c_i oznacza środek i-tego przedziału, a N jest czynnikiem normalizacyjnym. Parametry rozkładu N, μ, i σ wyznaczone były jako wynik procedury dopasowania. Zastosowano procedurę dopasowania bez normalizacji [Nowak 2002], używając metody najmniejszych kwadratów [Aczel 2000, Nowak 2002]. Statystyka dana wzorem (2) ma rozkład chi-kwadrat, χ^2_f, o $f = (n - p - 1)$ stopniach swobody, gdzie p oznacza liczbę parametrów wyznaczanych w procesie dopasowania. W przeprowadzonej analizie $p = 3$, ponieważ wyznaczano trzy parametry.

Bardzo ważne jest, aby sposób grupowania danych w klasy nie miał wpływu ani na wartości wyznaczanych parametrów, ani na wyniki testu zgodności. W celu sprawdzenia wpływu podziału na klasy wykonano obliczenia dla czterech różnych sposobów podziału. W każdym przypadku startowano od ustalonej liczby klas, n_0 = 40, 30, 25, 20. Przyjmuje się [Aczel 2000], że test zgodności chi-kwadrat można stosować, jeśli liczba obserwacji w każdym przedziale jest większa lub równa pięć. Z tego powodu, dla każdego wyjściowego podziału na n_0 klas, dokonano następnie łączenia sąsiednich przedziałów, tak aby spełnić ten warunek. Wartość obserwowana, $\overline{O}_i$, w przedziale powstałym z połączenia k sąsiednich przedziałów liczona była jako średnia z następującego wzoru:

$$\overline{O}_i = \frac{\sum_{s=1}^{k} O_s}{k} \tag{4}$$

gdzie, O_s oznacza liczbę cen w s-tym przedziale. Środek przedziału, $\overline{c}_i$, liczony był jako średnia arytmetyczna środków, c_s, łączonych przedziałów,

$$\overline{c}_i = \frac{\sum_{s=1}^{k} c_s}{k} \tag{5}$$

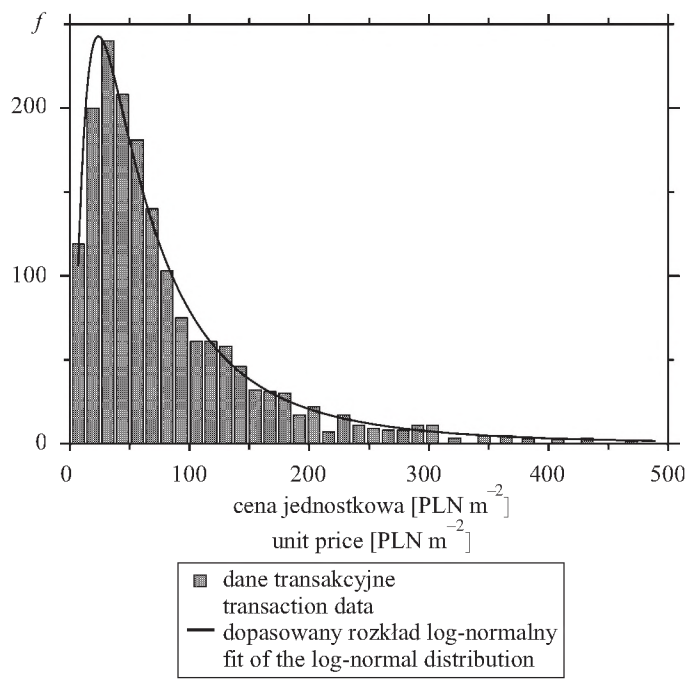
Jak wynika z opisanej wyżej procedury łączenia przedziałów, histogram składał się z liczby klas, n, mniejszej niż początkowa liczba n_0. Wartości n_0 oraz n dla czterech sposobów podziałów podano w pierwszej kolumnie tabeli 1.

Rysunek 1 przedstawia histogram $f(c)$ cen jednostkowych nieruchomości gruntowych, otrzymany dla podziału na n = 32 przedziały. Linią ciągłą wykreślono dystrybucję log-normalną z parametrami wyznaczonymi przez dopasowanie metodą najmniejszych kwadratów. Jakość dopasowania funkcji rozkładu do danych ocenić można lepiej na rysunku 2, na którym obie osie współrzędnych przedstawiono w skalach logarytmicznych. Jak widać, dane empiryczne bardzo dobrze pasują do dystrybucji log-normalnej, która na skali podwójnie logarytmicznej ma kształt paraboli. Wartości parametrów μ i σ, które determinują kształt dystrybucji, otrzymane dla wszystkich czterech sposobów podziału na klasy, zestawiono w tabeli 1 (Wartości czynnika normalizacyjnego, N, w tabeli pominięto).

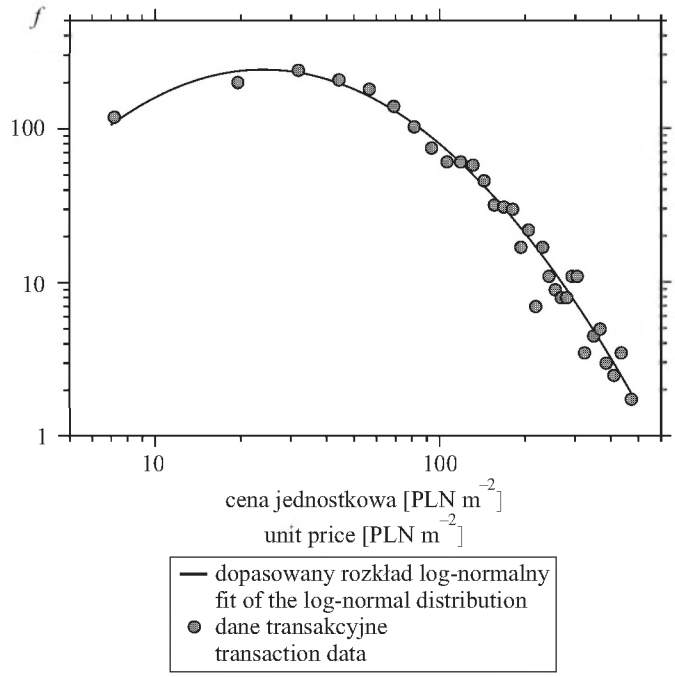
Tabela 1. Zestawienie wyników analizy
Table 1. Summary of results of the analysis

n (n_0)	μ [PLN m^{-2}]	σ	χ^2	
32 (40)	59,8 ± 7,9	0,956 ± 0,080	30,857	42,585
26 (30)	60,9 ± 6,3	0,915 ± 0,063	21,790	35,563
23 (25)	61,1 ± 5,3	0,897 ± 0,053	16,380	32,007
19 (20)	61,9 ± 4,7	0,894 ± 0,049	13,340	27,204

W pierwszej kolumnie podano liczbę klas, n, oraz – w nawiasach – wyjściową liczbę klas, n_0. Druga i trzecia kolumna zawiera wartości parametrów rozkładu, μ i σ, otrzymanych przez dopasowanie metodą najmniejszych kwadratów. Dwie ostatnie kolumny przedstawiają, odpowiednio, wartość statystyki χ^2 policzoną ze wzoru (2) oraz odpowiednią wartość krytyczną $\chi^2_{n-4,\alpha}$ dla $\alpha = 0{,}1$. Dla każdej liczby klas spełniony jest warunek $\chi^2_{n-4,\alpha}$
The first column presents the number of bins, n, and – in the brackets – the initial number of bins, n_0. In the second and third column, the parameters of the distribution, μ and σ, obtained from the least-squares fit are given. Two last columns present, respectively, the statisics χ^2 calculated from equation (2), and the corresponding critical value $\chi^2_{n-4,\alpha}$ for $\alpha = 0{,}1$. For each number of bins the condition $\chi^2_{n-4,\alpha}$ is satisfied



Rys. 1. Histogram jednostkowych cen nieruchomości gruntowych otrzymany dla $n = 32$ przedziałów. Linia ciągła przedstawia rozkład log-normalny z parametrami wyznaczonymi przez dopasowanie metodą najmniejszych kwadratów
Fig. 1. Histogram of the unit land prices obtained for $n = 32$ bins. The solid line represents the log-normal distribution fitted to the data using the least-squares method



Rys. 2. Dane z rysunku 1 przedstawione na wykresie podwójnie logarytmicznym
Fig. 2. The same as in Fig. 1, plotted in the double logarithmic scale

Wyniki przedstawione w tabeli 1 dowodzą, że sposób podziału na klasy nie miał większego wpływu na otrzymane wartości parametrów. Zmieniają się one bowiem w granicach błędu statystycznego i oscylują wokół średniej wartości $\mu = 60{,}9$ PLN m^{-2} oraz $\sigma = 0{,}916$.

Wartości statystyki χ^2 policzone na podstawie wzoru (2) oraz odpowiednie wartości krytyczne $\chi^2_{n-4,\alpha}$ dla poziomu zgodności $\alpha = 0{,}1$ dla różnej liczby klas, n, podają dwie ostatnie kolumny tabeli 1. Jak widać, dla każdego podziału na klasy, wartości statystyki χ^2 są mniejsze od wartości krytycznych. Oznacza to, że nie ma podstaw do odrzucenia postawionej hipotezy H_0, że rozkład cen jednostkowych nieruchomości gruntowych jest log-normalny.

DYSKUSJA

W poprzednim rozdziale pokazano, że rozkład cen jednostkowych w transakcjach dokonanych na rynku krakowskim jest log-normalny. Jest on powszechnie obserwowany w ekonomii. W szczególności z rozkładem log-normalnym jest zgodny rozkład tak zwanej małej i średniej wielkości bogactwa [Gibrat 1931]. Grunty o przeznaczeniu M4 pod niską zabudowę, będące przedmiotem analizy w tej pracy, kupują głównie indywidualni nabywcy. Stąd można wnioskować, że **rozkład cen jednostkowych nieruchomości**

gruntowych odzwierciedla rozkład bogactwa lokalnej społeczności. Oznacza to również że, parametry rozkładu cen – wielkości μ oraz σ występujące w równaniu (1) – charakteryzują zasobność społeczeństwa w badanym okresie. Mimo że analiza dotyczy rynku krakowskiego, można oczekiwać, że dystrybucja log-normalna jest uniwersalna i opisuje rozkład cen jednostkowych w innych polskich miastach. Lokalna specyfika powinna przejawiać się jedynie w wartościach parametrów μ oraz σ charakteryzujących rozkład log-normalny.

Istnieje prosty model opisujący dynamikę bogactwa w społeczeństwie, który prowadzi do rozkładu log-normalnego. Zaproponował go Gibrat [1931] (tak zwana reguła proporcjonalnego wzrostu). Wspomniany model opiera się na założeniu, że zmiana wielkości majątku wybranego inwestora opisana jest przez następujący proces stochastyczny:

$$w(t+1) = w(t)\eta(t), \tag{6}$$

gdzie: t – kolejne chwile czasowe (kroki inwestycyjne), na które określamy wielkość bogactwa; $w(t)$ – bogactwo indywidualnego inwestora w chwili t; $\eta(t)$ – zmienna losowa, której rozkład ma skończoną średnią i wariancję. Z matematycznego punktu widzenia równanie (6) opisuje stochastyczny proces multiplikatywny [Sornette, Cont 1997]. Ma ono również naturalną, dość prostą interpretację ekonomiczną. Opisuje sytuację, w której kapitał $w(t)$ zainwestowano ze stopą zwrotu $[\eta(t) - 1]$. Jeśli $\eta(t) > 1$, kapitał inwestora powiększa się, w przeciwnym wypadku maleje. Zmienna losowa $\eta(t)$ odpowiada zatem za przyrosty lub ubytki kapitału w kolejnych krokach inwestycyjnych. Po obustronnym zlogarytmowaniu, prawa strona równania (3) przekształca się w sumę logarytmów zmiennej stochastycznej $\eta(t)$ i kapitału początkowego w_0:

$$\ln w(t+1) = \ln \eta(t) + \ln \eta(t-1) + \ldots + \ln w_0, \tag{7}$$

Stąd, na podstawie centralnego twierdzenia granicznego [Nowak 2002], wynika, że logarytm wielkości bogactwa, ma rozkład normalny. Oznacza to, że dla procesu stochastycznego zdefiniowanego równaniem (6) rozkład bogactwa, $f(w)$, jest rozkładem log-normalnym opisanym równaniem (1).

W tym miejscu warto zwrócić uwagę na ważną różnicę między cenami transakcyjnymi a wartościami taksacyjnymi nieruchomości. Ceny transakcyjne – będące przedmiotem analizy prezentowanej w tej pracy – pochodzą z aktów notarialnych, natomiast wartości taksacyjne (assessed values of land) są wyliczane przez rzeczoznawców majątkowych raz do roku i stanowią podstawę podatku katastralnego. Sposób określania wartości taksacyjnych i transakcyjnych różni się zatem zasadniczo. Różnice dotyczą również liczebności populacji oraz struktury nieruchomości sprzedawanych i nieruchomości wycenianych. Corocznej taksacji w krajach, gdzie wprowadzono podatek katastralny, podlegają prawie wszystkie nieruchomości gruntowe. Przedmiotem transakcji jest natomiast ich niewielki procent. W przypadku Krakowa w analizowanym okresie 1996–1999 dokonano 6505 transakcji gruntami niezabudowanymi [Bitner 2002b], w tym odnotowano 127 odsprzedaży i 9 potrójnych sprzedaży tej samej nieruchomości. Oznacza to, że w ciągu czterech lat sprzedano jedynie 6,35% powierzchni całego zasobu działek położonych w granicach administracyjnych miasta. Opisane różnice między ceną a wartością mają odzwierciedlenie w rozkładach jednostkowych cen transakcyjnych i wartości taksacyjnych.

Rozkład wartości taksacyjnych zbadano i dokładnie opisano dla nieruchomości w Japonii. Ishikawa [2006] przeprowadził analizę rozkładu jednostkowych wartości taksacyjnych nieruchomości gruntowych. Należy dodać, że wartość taksacyjna w Japonii jest określana oddzielnie dla gruntu i oddzielnie dla budynków oraz innych części składowych nieruchomości. Ishikawa wykorzystał dane taksacyjne z 23 lat. Liczebność baz danych w poszczególnych latach rosła od około 6000 do 30 000. Dla tak znacznej rozpiętości czasowej i różnicy w liczbie danych okazało się, że w każdym roku rozkład jednostkowych wartości taksacyjnych jest zgodny z rozkładem Pareto. Należy zatem oczekiwać, że rozkład Pareto jest tak zwanym rozkładem generycznym wartości taksacyjnych. Z analizy przedstawionej w tym artykule oraz wyników zawartych w pracy Ishikawy [2006] wynika, że rozkład cen transakcyjnych i rozkład wartości taksacyjnych opisuje inny rodzaj funkcji.

W tej pracy do analizy wykorzystano ceny jednostkowe, nie zaś ceny całych nieruchomości. Jest to podyktowane faktem, że zarówno wartość, jak i cenę ustala się najpierw dla jednostki powierzchni nieruchomości. Hozer i in. [2002] i Gnat [2008] przedstawili histogramy rozkładów jednostkowych cen (cen 1 m^2) dla różnego typu nieruchomości. Histogramy: cen transakcyjnych i ofertowych domów, cen ofertowych mieszkań w Paryżu, stawek czynszu uzyskiwanych w przetargach na najem lokali użytkowych [Hozer i in. 2002] czy histogram wartości rynkowej wycenianych nieruchomości niezurbanizowanych [Gnat 2008] wskazują jednoznacznie, że nie są to rozkłady Gaussa. Są one zdecydowanie prawostronnie skośne, co pokrywa się wynikami pokazanymi w tej pracy.

Przeprowadzona analiza bazuje na danych z lat 1996–1999. Należy jednak podkreślić, że choć są to dane sprzed prawie dziesięciu lat, nie ma to znaczenia dla prezentowanego wniosku. Dotyczy on bowiem postaci funkcyjnej rozkładu cen nieruchomości, która jest niezależną od czasu własnością rynku. Z biegiem lat zmieniać mogą się jedynie parametry rozkładu – wielkości μ oraz σ.

PODSUMOWANIE

W artykule pokazano, że rozkład jednostkowych cen transakcyjnych nieruchomości gruntowych jest zgodny z rozkładem log-normalnym. Zgodność ta sugeruje, że jednostkowe ceny transakcyjne odzwierciedlają stan zasobności inwestorów działających na rynku. Rozkład log-normalny jest generycznym rozkładem małej i średniej zasobności, niezależnym od typu rynku. Tego samego typu rozkładu należy się zatem spodziewać dla cen jednostkowych sprzedanych mieszkań.

Różnica w postaciach funkcyjnych rozkładów cen transakcyjnych i wartości taksacyjnych wskazuje na różny charakter tych wielkości. W Polsce nie opracowano jeszcze algorytmu masowej wyceny, określającego wartość taksacyjną nieruchomości. Wyniki zaprezentowane w artykule pokazują jednak, że nie można w sposób bezpośredni przenosić informacji o cenach nieruchomości na ich wartości taksacyjne. Wartości taksacyjne powinny uwzględniać i odzwierciedlać o wiele więcej informacji o nieruchomościach niż te pochodzące od ich nabywców. Różnice w rozkładach cen i wartości nieruchomości są przejrzystym przykładem różnic w znaczeniach pojęć ceny i wartości. Dlatego, tworząc

system informacji o nieruchomościach [Kuryj, Źróbek 2005], warto zamieścić informacje zarówno o cenach, jak i o wartościach nieruchomości.

Otrzymany wynik wskazuje również na potrzebę dokładnej wstępnej analizy statystycznej danych o nieruchomościach. Zakładając *a priori*, że rozkład cen transakcyjnych jest rozkładem Gaussa, można popełnić błąd. W szczególności takie niezweryfikowane założenie powoduje stosowanie nieodpowiednich testów statystycznych. Dlatego by poprawnie dobrać i stosować narzędzia statystyczne, warto zbadać postać funkcyjną rozkładu cen.

PIŚMIENNICTWO

Aczel A.D., 2000. Statystyka w zarządzaniu. Wydawnictwo Naukowe PWN.

Allanson P., 1992. Farm size structure in England and Wales, 1939–89. Journal of Agricultural Economics 43(2), 137–148.

Amaral, I., A.N., Buldyrev, S.V., Havlin, S., Leschhorn, H., Maass, P., Salinger, M.A., et al. 1997. Scaling behavior in economics. I. Empirical results for company growth. J. Phys. I France 7, 621–633.

Bitner A., 2002a. Czy analiza powtórnych sprzedaży jest efektywną techniką wyznaczania współczynnika wzrostu cen? Rzeczoznawca majątkowy 32, 2902–2915.

Bitner A., 2002b. The issue of the representativeness of random samples In the context of parcel field areas. Proceedings of the Kraków Section, Geobesy, 39, 87–92.

Bitner A., 2003. Wskaźniki wzrostu cen nieruchomości gruntowych dla dużych rynków lokalnych. Materiały III Konferencji Naukowo-Technicznej PSRWN. Gdańsk, 119–134.

Bordley R.F., McDonald J.B., Mantrala A., 1996. Something new, something old. Parametric models for the size distribution of income. Journal of Income Distribution 6, 91–103.

Champernowne D.G., 1953. A model of income distribution. Economic Journal 63, 318–351.

Clauset A., Shalizi C. R., Newman M. E. J., 2009. Power-law distribution in empirical data. Internet Mathematics 1(2), 226–251.

Crow E.L., Shimizu K., 1988. Lognormal Distributions. Theory and Applications. M. Dekker New York.

Fiałkowski M., Bitner A., 2008. Universal rules for fragmentation of land by humans. Landscape Ecology 23, 1013–1022.

Ganugi P., Grossi L., Crosato L., 2004. Firm size distributions and stochastic growth models: a comparison between ICT and Mechanical Italian Companies, Statistical Methods and Applications 12, 391–414.

Gibrat R., 1931. Les inegalites economiques. Sirey Paris.

Gnat S., 2008. Propozycja zastosowania wybranych metod badań operacyjnych do ustalania stawki podatku katastralnego. Studia i materiały Towarzystwa Naukowego Nieruchomości 16(3), 115–123.

Growiec J., Pammolli F., Riccaboni M., Stanley H.E., 2008. On the size distribution of business firms. Economics Letters 98, 207–212.

Hozer J., Kokot S., Kuźmiński W., 2002. Metody analizy statystycznej rynku w wycenie nieruchomości. PFSRM Warszawa.

Ishikawa A., 2006. Annual change of Pareto index dynamically deduced from the law of detailed quasi-balance. Physica A 371, 525–535.

Ishikawa A., 2008. Power-Law and Log-Normal Distributions in Firm Size Displacement Data. Economics: The Open-Access, Open-Assessment E-Journal, 2, 2008–2045, http://www.economics-ejournal.org/economics/discussionpapers/2008–45; 4.11.2009.

Kaizoji T., 2003. Scaling behavior in land markets. Physica A 326, 256–264.
Kaizoji T, Kaizoji M., 2004. A mechanism leading from bubbles to crashes. The case of Japan's land market. Physica A 344, 138–141.
Kalecki M., 1945. On the Gibrat Distribution. Econometrica 13, 161–170.
Kuryj J., Zróbek S., 2005. Koncepcja rejestru cen i wartości nieruchomości jako integralnej części systemu informacji o nieruchomościach. Przegląd Geodezyjny 10, 3–8.
Levy M., Solomon S., 1997. New evidence for the power-law distribution of wealth. Physica A, 242, 90–94.
Limpert E., Stahel W.A. Abbt M., 2001. Log-normal Distribution across the Sciences. Keys and Clues. BioScience 51(5), 341–352.
Mitzenmacher M., 2003. A brief history of generative models for power law and lognormal distributions. Internet Mathematics 1(2), 226–251.
Nowak R. 2002. Statystyka dla fizyków, PWN Warszawa.
Oshiro K., 2003. Land Price Changes in Sendai and Sapporo, Japan 1993–1998. The Industrial Geographer 1(1), 35–50.
Pareto V., 1897. Cours d'Economique Politique. Macmillan, London.
Sornette D., Cont R., 1997. Corvergent multiplicative processes repelled from zero. power laws and truncated power laws. J. Phys. I France 7, 431–444.
Souma W., 2002. Physics of personal income. W: Takayasu, H. (ed.), Empirical Science of Financial Fluctuations. Springer-Verlag.
Stanley, M.H.R., Amaral. L.A.N., Buldyrev, S.V., Havlin. S., Leschhorn, H., Maass, P., et al., 1996. Scaling behavior in the growth of companies. Nature, 379, 804–806.

DISTRIBUTION OF UNIT PRICES OF UNDEVELOPED LAND

Abstract. In this paper we determined the distribution function of unit land prices of undeveloped land. The analysis was based on 1752 sale transactions in Kraków. We found that the data follows the log-normal distribution with very high significance level. The result obtained suggests that the distribution function of the unit land prices is the same as that of small and middle ranges of society wealth.

Key words: real estate valuation, log-normal distribution, unit price distribution, wealth distribution, land real estate, financial market

Zaakceptowano do druku – Acctepted for print: 29.09.2009